1725

Der Anfangs-Gründe Aller Mathematischen Wissenschaften

Letzter Theil/

Welcher so wohl die gemeine Algebra / als die Differential- und Integral-Rechnung/ und einen Anhang von den vornehmsten Mathematischen Schrifften in sich begreiffet,

Und zu mehrerem Aufnehmen der Mathematick so wohl auf hohen/ als niedrigen Schulen aufgesetzet worden

Von

Christian Wolffen /

Hoch-Fürstl. Heß. Hof-Rathe und Math. & Phil. Prof. Primario zu Marburg/ der Königl. Groß-Britannischen/ wie auch der Königl. Preuß. Societät der Wissenschafften Mitgliede.

Die dritte Auflage/
hin und wieder verbessert und vermehret.

Halle im Magdeburgischen, An. MDCCXXV.
Zu finden in der Rengerischen Buchhandlung.

Bayerische
Staats-Bibliothek
München

Anfangs-Gründe
So wohl der gemeinen
Algebra,
Als der
Differential-
Und
Integral-Rechnung.

Vorrede.

Geneigter Leser:

SJe Algebra kan niemahls zuviel gerühmet werden: denn sie ist eine Kunst/ durch welche man mathemathische Wahrheiten von sich selbst erfinden kan. Wenn ihr demnach die Anfangs-Gründe der mathematischen Wissenschaften/ die ich in den drey vorhergehenden Theilen erkläret habe/ euch bekandt machet und die Algebra dabey studiret; so werdet ihr aus jenen durch diese vor euch selbst finden können/ was ihr sonst aus Büchern oder von anderen zu lernen von Nöthen hättet. Ja ihr werdet auch vieles erfinden können/ was andere vor euch noch nicht gedacht haben. Mit einem Worte sie machet euch geschickt/ daß/ wenn ihr nur gantz was geringes aus den mathematischen Wissenschaften gelernet/ ihr von euch selbst ein mehreres erfinden könnet zu der Zeit/ wenn ihr es von Nöthen habet. Es ist aber keine vollkommenere Art zu studiren/ als wenn man nur ein weniges lernen darf und sich dabey doch auf alle vorkommende Fälle geschickt machet. Ich sage aber

noch mehr. Ihr treffet in der Algebra die allervollkommenste Manier zu raisoniren an. Denn sie stellet die Begriffe der Sachen durch Zeichen vor und verwandelt die Schlüsse/ welche mit vielem Bedacht aus ihnen hergeleitet werden/ in eine leichte Manier die Zeichen miteinander zu verknüpffen und von einander zu trennen. Dadurch erhält man öfters in einer Zeile mehr/ als in grossen Büchern nicht Raum finden würde. Durch das Anschauen wenniger Zeichen werdet ihr öfters verständiger/ als ihr durch vieler Jahre Arbeit nach der gemeinen Art zu lernen und zu dencken nicht werden könnet. In dieser Absicht pfleget man die Algebra den Gipfel menschlicher Wissenschaften zu nennen/ und dieses von Rechts wegen. Ich habe demnach so wohl die gemeine Algebra/ als die unvergleichliche Differential- und Integral-Rechnung des Herrn von Leibnitz dergestalt erklären wollen/ daß nicht allein ihre Kunst-Griffe unvermerckt beygebracht/ sondern auch die Haupt-Lehren von der so genanten Mathesi pura zugleich mit erlernet/ ja von selbsten gefunden werden.

Anfangs-Gründe Der Algebra.

Der erste Theil.

Von den Anfangs-Gründen der gemeinen Algebra.

Die 1. Erklärung.

1.

Die gemeine Algebra ist eine Wissenschaft aus einigen gegebenen endlichen Grössen, andere ihres gleichen, von denen in Ansehung der gegebenen etwas bekandt gemacht wird, vermittelst gewisser Gleichungen zu finden.

Die 1. Anmerckung.

2. Z. E. Ihr sollet zwey Zahlen finden/ die mit einander multipliciret eine gegebene Zahl 60/ hingegen zusammen addiret eine andere gegebene Zahl 16 bringen. Also werden euch gegeben zwey Zahlen und ihr sollet aus denselben zwey andere Zahlen finden/ von welchen euch bekandt gemacht wird/ daß ihre Summe der kleineren/ ihr Product aber der grösseren von den gegebenen Zahlen gleich seyn sol. Die Algebra nun lehret euch nicht allein in gegenwärtigem Falle die verlangten Zahlen/ sondern auch eine allgemeine Regel finden/ nach welcher ihr alle Exempel von dieser Art rechnen könnet.

Zusatz.

3. Also ist die Algebra eine allgemeine Rechen-Kunst, dadurch man nemlich alles, was sich rechnen läst, ausrechnen kan (§. 1. *Arithm.*).

Die 2. Anmerckung.

4. Daher nennet auch der grosse Mathematicus in Engelland/ Herr Isaac Newton, seine Anweisung zur Algebra Arithmeticam Universalem und wir können die Algebra in unserer Deutschen Sprache mit gutem Fuge eine Allrechen Kunst heissen/ zumahlen wenn man die Buchstaben-Rechen-Kunst mit dazu nimmet.

Die 2. Erklärung.

5. Die Buchstaben-Rechen-Kunst wird diejenige genennet, welche an stat der Ziffern allgemeine Zeichen der Gr[redacted]braucht, und damit die gewöhnli[redacted]Rechnungs-Arten verrichtet.

Die 3. Erklärung.

6. Eine Grösse nennen wir alles dasjenige, was sich vermehren und vermindern läst/ in so weit es sich vermehren und vermindern läst.

Der 1. Zusatz.

7. Also bestehet das Wesen einer Grösse in der Verhältnis zu einer anderen ihres gleichen (§. 65. *Arithm.*).

Die 1. Anmerckung.

8. Z. E. Die Wärme nenne ich in so weit eine Grösse/ als ich dencken kan/ wie vielmahl eine gegebene Wärme/ als die

die Wärme der Luft des heutigen Tages in einer anderen gegebenen Wärme/ als in der Wärme der Luft des gestrigen Tages enthalten sey.

Der 2. Zusatz.

9. Und folgends sind die Grössen undeterminirte Zahlen, da man nemlich noch kein gewisses Eines setzet (§. 5. 8. *Arithm.*).

Die 2. Anmerckung.

10. Nehmet Z. E. eine gerade Linie von einer determinirten Länge. Setzet die Linie sey eingetheilet in 4 gleiche Theile. Wenn ihr einen von denselben zur Eines machet und die Länge der gantzen Linie mit ihm vergleichet: so heisset die Linie 4 und ihr betrachtet die Länge als eine Zahl. Setzet abermals die Linie sey eingetheilet in 5 gleiche Theile. Wenn ihr einen davon zur Eines machet und die Länge der gantzen Linie mit ihr vergleichet: so heisset die Linie 5 und ihr betrachtet ihre Länge abermahls als eine Zahl. Wiederum setzet die Linie sey eingetheilet in 13 gleiche Theile und vergleichet ihre gantze Länge mit einem solchen Theile; so heisset sie 13 und ihr betrachtet dieselbe als eine Zahl. Hieraus sehet ihr/ daß die Länge einer Linie durch unzehlich viel Zahlen/ grosse und kleine ausgesprochen werden kan/ nach dem ihr nemlich einen grossen oder kleinen Theil derselben zur Eines annehmet. Wenn ihr nun keinen gewissen Theil setzet/ mit welchem sie verglichen werden soll; sondern sie nur überhaupt betrachtet/ in so weit sie mit einer gewissen Eines kan verglichen werden: so stellet ihr euch dieselbe als eine Grösse vor. Und daher kommet es/ daß durch die Buchstaben-Rechen-Kunst sehr allgemeine Wahrheiten erfunden werden: Da hingegen die Rechen-Kunst nur einzele Exempel ausrechnet und also stets mit einzelen Fällen zu thun hat.

Der 3. Zusatz.

11. Alles, was wir in der Welt antreffen und in uns selbst finden, hat in allem dem, was es würcklich ist und wovon sich etwas gedencken läst, seine Schrancken und läst sich dannenhero mit anderen Dingen von seiner

Art vergleichen und darum als etwas, so vermehret oder vermindert werden kan, das ist, als eine Grösse (§. 6. 7.) betrachten. Derowegen erstrecket sich die Buchstaben-Rechenkunst und Algebra auf alle endliche Dinge und führet uns auf einen deutlichen Begriff von ihrer Endlichkeit.

Die 3. Anmerckung.

12. Es kan keine vollkommenere Erkäntnis gedacht/noch verlanget werden/ als wenn man von der Endlichkeit der Dinge einen deutlichen Begriff erlanget: welches ich bey anderer Gelegenheit klar und deutlich ausführen wil. Daher dienet die Algebra zu einer vollkommenen Erkäntnis der Dinge zu gelangen/ und ohne sie würde es in den meisten Fällen unmöglich seyn selbige zu überkommen.

Der 4. Zusatz.

13. Weil die Grössen undeterminirte Zahlen sind (§. 9), so kan man auch keine andere Veränderungen, als wie mit Zahlen, mit ihnen vornehmen, und daher sie entweder zusammen addiren, oder von einander subtrahiren, oder durch einander multipliciren, oder durch einander dividiren (§. 13. 15. 18. 21. 24. *Arithm.*).

Die 4. Anmerckung.

14. Gleichwie ihr aber mit Zahlen keine Rechnung vornehmen könnet/ ihr müsset euch vorher dieselben durch gewisse Zeichen vorstellen: eben so wird in der Algebra erfordert/ daß ihr für die Grössen gewisse Zeichen erfinnet.

Der 1. willkührliche Satz.

15. Man benenne die gegebenen Grössen jederzeit mit den ersten Buchstaben des Al-

pha-

phabets / a, b, c, d u. s. w. die unbekandten aber / welche man suchet / mit den letzten x, y, z.

Die 1. Anmerckung.

16. Wie sich die Grössen dem Verstande zu erkennen geben / so müssen sie auch durch die Zeichen von einander unterschieden werden. Nun stellen sie sich in den algebraischen Aufgaben jederzeit dem Verstande vor / entweder als gegegebene / das ist / bekandt gemachte / oder als gesuchte / das ist / noch unbekandte Grössen: Derowegen muß man auch durch die Zeichen unserer Einbildungs Kraft diesen Unterscheid klärlich vorstellen. Denn sonst wäre Gefahr / daß man das Unbekandte mit dem Bekandten leicht verwirrete und daher in Irrthum verfiele.

Die 2. Anmerckung.

17. Es wäre bey der Benennung der Grössen noch gar viel zu erinnern. Denn wenn sie geschickt und zum Erfinden dienlich seyn soll / müssen die Zeichen alle gegebene relationes der bedeuteten Dinge gegen einander andeuten. Z. E. Wenn eine von den unbekandten Grössen dreymahl so groß ist als die andere / und die kleinere heisset x; so nennet man die grössere lieber $3x$ als y. Allein ich würde den Anfängern nicht dienen / wenn ich sie mit vielen Regeln auf einmahl überhäuffete. Und halte es dannenhero für rathsamer / daß ich es inskünfftige lieber durch Exempel lehre / und die Regeln nach und nach gleichsam unvermerckt und ohne Mühe beybringe.

Der 2. willkührliche Satz.

18. Das Zeichen der Addition ist $+$, der Subtraction aber $-$. Jenes wird durch Mehr; dieses durch Weniger ausgesprochen.

Anmerckung.

19. Z. E. Die Summe zweyer Grössen a und b wird geschrieben $a + b$ und ausgesprochen: a mehr b. Hingegen die Differentz zweyer grössen wird geschrieben durch $a - b$ und ausgesprochen: a weniger b. Als es bedeute a 7 Thaler / b 8 Groschen: so bedeutet $a + b$, 7 Thl. $+$ 8 gl. das ist /

ist/ 7 Thl. und 8 gl.; hingegen a — b, 7 Thl. — 8 gl. das ist 7 Thl. weniger 8 gl.

Der 3. willkührliche Satz.

20. Die Multiplication hat entweder gar kein Zeichen, sondern man setzet die Buchstaben, welche einander multipliciren, ohne einiges Zeichen neben einander: oder man deutet sie durch ein Comma (,) oder einen Punct (.) an. Insgemein brauchet man dieses Zeichen ×.

Anmerckung.

21. Wenn a durch b multipliciret werden soll/ so schreibet das Product ab, oder a, b oder a. b, oder a × b. Wir werden uns des letzteren Zeichens niemahls bedienen/ weil es leicht mit dem *X* vermenget wird. Doch haben wir es hiermit anführen sollen/ weil es in allen Büchern häufig vorkommet. Am meisten werden wir kein Zeichen brauchen: das Comma und den Punct aber nur in gewissen Fällen aus besonderen Ursachen/ die sich in seiner Zeit in den Exempeln zeigen werden.

Der 4. willkührliche Satz.

quantitates compositæ multiplicandæ.

22. Wenn eine Grösse viele andere auf einmahl multipliciret, so schliesset man sie in eine parenthesin ( ) ein und setzet jene ohne einiges Zeichen vor oder hinter die parenthesin: oder man setzet zwischen dieselben ein blosses Comma.

Anmerckung.

23. Das Product von $a + b - c$ in d, schreibet entweder also $(a+b-c)\,d$, oder dergestalt $d\,(a+b-c)$, oder auch folgender massen $a + b - c, d$. Insgemein schreibet man dieses Product also: $a + b - c \times d$,

oder

oder auch $d \prec a+b-c$. Allein wir bleiben billig bey der Manier des Herrn von Leibnitz/ welche mit grossem Vortheile in die Acta Eruditorum Lipsiensia eingeführet worden: denn man kan sich nicht so leicht verirren wie bey den gemeinen Zeichen/ und machet auch den Buchdruckern nicht so viel unnöthige Mühe/ ersparet über dieses viel an dem Raume. Andere Vortheile wollen wir jetzt nicht gedencken/ die sich in folgendem zeigen werden.

Der 5. willkührliche Satz.

24. Das Zeichen der Division sind zwey Puncte: / oder man schreibet die Buchstaben, welche einander dividiren sollen, wie in der Rechen-Kunst einen Bruch.

Anmerckung.

25. Wenn a durch b dividiret werden soll/ so schreibet man den Qvotienten entweder $a:b$/ oder $\frac{a}{b}$ und spricht es beyderseits aus a durch b dividiret.

Der 6. willkührliche Satz.

26. Wenn eine Grösse viel andere auf einmahl dividiret, oder viel andere eine dividiren, so werden, wie in der Multiplication, die vielen in eine parenthesin ( ) eingeschlossen, oder man kan auch an deren stat ein blosses Comma brauchen.

Anmerckung.

27. Wenn $a+b$ durch c dividiret werden sol/ so schreibet den Quotienten entweder $(a+b):c$ oder $a+b,:c$. Sollet ihr a durch $b+c$ dividiren/ so ist der Quotient $a:(b+c)$ oder $a:,b+c$. Wiederum wenn ihr $a+b$ durch $c+d$ dividiret/ so schreibet den Qvotienten $(a+b):(c+d)$ oder $a+b,:,c+d$. Nach der gemeinen

Art

Art schreibet ihr diese Qvotienten $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a}{b+c}$, $\frac{a+b}{c+d}$, oder auch $\frac{a+b}{c}$, $a : \frac{b}{b+c}$, $\frac{a+b}{c+d}$.

Die 1. Aufgabe.

28. Einerley Grössen mit einerley und verschiedenen Zeichen zusammen zu addiren.

Auflösung.

1. Wenn sie einerley Zeichen haben, so zehlet sie wie in der Rechen-Kunst zusammen.
2. Sind aber die Zeichen verschieden, so ziehet von der grösseren die kleinere ab, und setzet zu dem, was überbleibet, das Zeichen der grösseren.

Exempel.

$$\begin{array}{r} a + 2b - 3c - 5d \\ 3a - 2b + 6c + 2d \\ \hline 4a + 3c - 3d \end{array}$$

Beweiß.

Weil die Buchstaben undeterminirte Zahlen sind (§. 9. 15); so könnet ihr einen jeden als Eines ansehen, und demnach die Grössen, welche durch einerley Buchstaben benennet werden, als Dinge von gleicher Art zusammen zehlen (§. 8. *Arithm.*). Alle Grössen, welche mit den Zeichen — bemer-

cket

cket werden, fehlen und hingegen die das Zeichen + haben, sind vorhanden. Wenn ich derowegen von beyder Art addiren soll, so wird durch die letzteren der Mangel aufgehoben, und muß freylich die Addition in eine Subtraction verkehret werden. W. Z. E.

Die 1. Anmerckung.

29. Die Grössen/ welche mit dem Zeichen — bemercket werden/ hat man nicht anders als Schulden anzusehen/ und hingegen die anderen mit dem Zeichen + als baares Geld. Und daher nennet man auch die ersten weniger als nichts/weil man erst so viel weg geben muß/ als man schuldig ist/ehe man nichts hat.

Die 2. Anmerckung.

30. Damit euch die Rechnung mit Buchstaben deutlicher wird/ so bildet euch ein/ a bedeute 1 thl. b 1 gl. c 1 pf.

$7a - 9b + 5c$	7 thl. — 9 gl. + 5 pf.
$3a + 5b - 9c$	3 thl. + 5 gl. — 9 pf.
$10a - 4b - 4c$	10 thl. — 4 gl. — 4 pf.

Die 2. Aufgabe.

31. Einerley Grössen mit einerley oder verschiedenen Zeichen von einander zu subtrahiren.

Auflösung.

1. Wenn einerley Zeichen sind, und ihr sollet das kleinere von dem grösseren abziehen, so verrichtet die Subtraction wie in Ziffern (§. 49. *Arithm.*).
2. Sollet ihr aber die grössere von der kleineren

neren abziehen, so ziehet die kleinere von der grösseren ab, und zu dem übrigen setzet das Zeichen —, wenn die Grössen + haben: hingegen +, wenn sie — haben.

3. Wenn die Zeichen verschieden sind, so addiret die Grössen, die ihr von einander abziehen sollet/ und zu der Summe setzet das Zeichen derjenigen Grösse, von welcher die Subtraction geschehen solte.

Exempel.

8a — 5c + 9d	8 thl. — 5 gl. + 9 pf.
6a — 8c — 7d	6 thl. — 8 gl. — 7 pf.
2a + 3c + 16d	2 thl. + 3 gl. + 16 pf.

9b + 15c — 7d + 8e — f
6b + 20c — 9d — 9e + f
3b — 5c + 2d + 17e — 8f

Beweiß.

Weil ihr jeden Buchstaben als Eines ansehen könnet (§. 9. 15); so könnet ihr auch wie in Zahlen die Subtraction verrichten. Allein wenn ihr die grössere von der kleineren abziehet, und sie haben das Zeichen +, als 20c von 15c, so nehmet ihr 20c weg, müsset aber wieder von oben die 15c addiren, und dannenhero fehlen nur noch so viel c als der Unterscheid zwischen 20 und 15 ist, nemlich 5. Hingegen wenn das Zeichen — ist, als

wenn

wenn ihr —9d von —7d abziehen sollet; so müsset ihr —9d addiren, weil ihr es zuviel abgezogen. Denn ihr soltet 20c—9d wegnehmen: ihr habet aber 20 c gantz weggenommen. Da nun oben 7d fehlen, so heben sich von den 9d, die ihr dazu addiret, 7 auf und bleiben nur noch 2d übrig. Darum dörffet ihr in diesen Fällen nur allezeit die kleinere von der grösserrn abziehen, und zu dem übrigen das widrige Zeichen setzen, nemlich — wenn ihr + habet, und + wenn — ist. Endlich wenn die Zeichen verschieden sind, und ihr sollet Z. E. —9e von +8e abziehen; so wisset ihr aus dem vorhergehenden, daß die unteren 9e addiret werden müssen, weil ihr zuviel in dem vorhergehenden abgezogen. Und demnach bekommet ihr +17e. Hingegen wenn ihr Z. E. +7f von —f subtrahiren sollet; so fehlet euch schon ein f. Wenn ihr nun die 7f unten auch noch wegnehmen sollet, so fehlen euch zusammen 8f. Daher habet ihr in beyden Fällen nur nöthig die Grössen zu addiren, und zu der Summe das Zeichen zu setzen, welches die Grösse hat, davon die Subtraction geschiehet. W. Z. E.

Die 3. Aufgabe.

32. Grössen mit einerley und verschiedenen Zeichen durch einander zu multiplicieren.

Auflösung.

Verrichtet die Multiplication, wie in Zahlen (§. 55. *Arithm.*), nur mercket: daß einerley Zeichen im Producte +, verschiedene aber — geben.

Exempel.

a + b − d	10 = 8 + 4 − 2
a − b − d	2 = 8 − 4 − 2
− ad − bd + dd	− 16 − 8 + 4
− ab − bb + bd	− 32 − 16 + 8
aa + ab − ad	64 + 32 − 16
aa − bb − 2ad + dd	68 − 48 = 20

Beweiß.

Wenn ihr + durch + multipliciret, so ist klar, daß das Product auch + haben muß. Ingleichen ist nicht schweer zu begreiffen, daß in dem Producte das Zeichen — seyn muß, wenn ihr + durch — multipliciret, weil ihr einen Mangel oder eine Schuld etliche mahl nehmet. Allein wenn — durch — multipliciret wird, scheinet es nicht gleich klar zu seyn, warum in dem Producte + ist. Mercket demnach, daß, wenn ihr 3 — 2 durch — 2 multipliciren sollet, ihr den Defect — 2 so vielmahl nehmen sollet, als 3 — 2 Einheiten hat; das ist, 1 mahl. Da ihr nun anfangs 3 mit —

2 mul-

2 multipliciret, so nehmet ihr den Defect 3 mahl und demnach 2 mahl zuviel. Derowegen müsset ihr ihn noch zwey mahl dazu wieder addiren. Und also giebet — 2 mit — 2 zum Producte + 4. W. Z. E.

Zusatz.

33. Wenn ihr — a mit + b multiplicitet, so kommet — ab heraus. Derowegen wenn ihr — ab durch + b dividiret, muß — a heraus kommen. Dividiret ihr aber — ab durch — a, so muß + b heraus kommen. Demnach ist klar, daß auch in der Division die Regel gilt: Einerley Zeichen geben im Quotienten +, verschiedene aber —.

Die 4. Aufgabe.

34. Grössen mit einerley und verschiedenen Zeichen durch einander zu dividiren.

Auflösung.

Wenn eine gegebene Grösse durch die andere sich würcklich dividiren lässet; so verfahret wie in Zahlen (§. 59. *Arithm.*), nur daß ihr die Regel von Veränderungen der Zeichen wohl in acht nehmet (§. 33).

Kan aber die Division nicht würcklich geschehen, so bleibet es bey dem, was oben (§. 24. & seqq.) gesaget worden.

Exempel.

$$\begin{array}{r|l} a-b-d) & aa-bb-2ad+dd\ (a+b-d) \\ & aa-ab-ad \\ \hline & +ab-bb-ad+dd \\ & +ab-bb-bd \\ \hline & +bd-ad+dd \\ & +bd-ad+dd \\ \hline & 0 \end{array}$$

Anmerckung.

35. Weil die Buchstaben nicht wie die Zahlen eine Bedeutung von der Stelle haben / in welcher sie stehen ; so dörffet ihr euch hier an keine Ordnung binden/ sondern möget den Qvotienten suchen/ in welchem Gliede ihr ihn findet: welches auch in dem Subtrahiren des Products aus dem Divisore in den Qvotienten statt findet.

Die 4. Erklärung.

36. **Wenn man eine Grösse durch sich selbst multipliciret, so heisset das Product, welches heraus kommet, die andere Potentz oder Dignität derselben Grösse. Multipliciret ihr die andere Dignität noch einmahl durch die erste, so kommet die dritte Potentz oder Dignität heraus. Multipliciret ihr ferner die dritte durch die erste, so kommet die vierdte Potentz oder Dignität heraus. Multipliciret ihr die vierdte durch die erste, so kommet die fünfte Potentz oder Dignität heraus, u. s. w.**

Die

Die erste Stamm-Grösse, so die erste Dignität genennet wird, heisset auch die Wurtzel in Ansehung der anderen, dritten, vierdten, fünften ꝛc. Dignität.

Der 7. willkührliche Satz.

37. Den Grad der Potentz oder Dignität einer Grösse deutet durch eine kleine Zifer, oder, wenn er nicht determiniret ist, durch einen kleinen Buchstaben an, den ihr oben zur Rechten an denjenigen Buchstaben setzet, wodurch die Grösse benennet wird. Z. E. die andere, dritte, vierdte ꝛc. Dignität von x ist x^2, x^3, x^4, ꝛc. x^m. Diese Zahlen aber werden die Exponenten der Dignitäten genennet.

Der 1. Zusatz.

38. Dannenhero wenn ihr eine Dignität durch eine andere von eben der Wurtzel multipliciren sollet, so dörffet ihr nur ihre Exponenten zusammen addiren.

Exempel.

x^3	y^m	x^m	x^n
x^4	y^n	x^r	x^n
x^7	y^{m+n}	x^{m+r}	x^{2n}

Der 2. Zusatz.

39. Hingegen wenn ihr die Dignität einer Grösse durch eine andere Dignität der-

selben dividiren sollet; so dörffet ihr nur ihre Exponenten von einander subtrahiren.

Exempel.

$$\frac{x^7}{x^4} \qquad \frac{x^7}{x^3} \qquad \frac{y^{m+n}}{y^n} \qquad \frac{y^n}{y}$$

$$x^3 \qquad x^4 \qquad y^m \qquad y^{n-1}$$

Der 3. Zusatz.

40. Endlich wenn ihr die Dignität einer Grösse zu einer anderen Dignität erheben sollet, so dörffet ihr nur ihren Exponenten durch den Exponenten der anderen multipliciren. Z. E. Ihr sollet x^3 zu der vierdten Dignität erheben: so multipliciret 3 durch 4, und nehmet x^{12} vor die gesuchte Dignität an. Oder überhaupt ist die Dignität n von $y^m = y^{mn}$.

Anmerckung.

41. Die Ursache ist leicht zu errathen. Denn ihr sollet den Exponenten 3 viermahl zu sich selbst addiren (§. 38). Dieses aber geschiehet/ wenn ihr ihn durch 4 multipliciret (§. 23. *Arithm.*).

Der 4. Zusatz.

42. Folgends wenn ihr aus einer gegebenen Dignität eine verlangte Wurtzel ziehen sollet, das ist, diejenige Grösse finden, welche zu einer gewissen Dignität erhoben worden (§. 90. 91. *Arithm.* & §. 36. *Algebr.*); so dörffet ihr nur ihren Exponenten durch den Exponenten der Wurtzel dividiren. Z. E.

Die

Die Wurtzel der vierdten Dignität aus x^{12} ist x^3 die Wurtzel m aus x^n ist $x^{n:m}$.

Anmerckung.

43. Mercket wohl diese Art die Wurtzeln zu zeichnen/ denn ihr werdet inskünftige grossen Vortheil davon haben.

Der 8. wilkührliche Satz.

44. Wenn ihr die Wurtzel aus einer Grösse ziehen sollet/ dergleichen sie nicht hat/ so fezet folgendes Wurtzel-Zeichen vor sie und darüber den gehörigen Exponenten der Wurtzel: in der Quadrat-Wurtzel aber könnet ihr den Exponenten weglassen. Also schreibet ihr die Cubica Wurtzel von x, $\sqrt[3]{x}$; hingegen die Wurtzel der fünften Dignität von x, schreibet ihr $\sqrt[5]{x}$.

Zusatz.

45. Weil $\sqrt{x} = x^{1:2}$, $\sqrt[3]{x^2} = x^{2:3}$, $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ (§. 42); so könnet ihr jederzeit eine Formul in die Stelle der anderen setzen, nachdem ihr von dieser oder von jener einen Vortheil haben könnet.

Die 5. Erklärung.

46. Dergleichen Grössen, daraus die verlangte Wurtzel nicht genau gezogen werden kan/ werden Irrational-Grössen

oder / wenn es Zahlen sind / Irrational-Zahlen genennet. Dergleichen sind

$\sqrt[3]{2}$ / $\sqrt[3]{4}$ / $\sqrt[5]{6}$.

Anmerckung.

47. Die Irrational-Grössen können entweder eine Benennung haben / als $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[3]{5}$ / oder verschiedene / als $\sqrt[4]{3}$ und $\sqrt[5]{6}$.

Die 5. Aufgabe.

48. Irrational-Grössen von verschiedener Benennung zu einer Benennung zu bringen.

Auflösung.

Es seyn die gegebenen Irrational-Grössen $x^{n:m}$ und $y^{r:s}$.

Weil der Unterscheid der Benennung in dem Unterscheide der Exponenten $^{n:m}$ und $^{r:s}$ bestehet, hingegen man diese Brüche in andere gleichgültige verwandeln kan, die einerley Benennung haben (§. 81. *Arithm.*); so ist weiter nichts vonnöthen, als daß ihr die Exponenten unter einerley Benennung bringet, und die dadurch gefundene Brüche in die Stelle der Exponenten schreibet. So werdet ihr finden, daß $x^{n:m} + y^{r:s} = x^{ns:ms} + y^{mr:ms} = \sqrt[ms]{x^{ns}} + \sqrt[ms]{y^{mr}}$.

Anmerckung.

49. Auf eben diese Art könnet ihr mit den Irrational-Zahlen verfahren. Z. E. Ihr sollet $\sqrt[3]{5}$ und $\sqrt[3]{3}$ unter-

ter

ter eine Benennung bringen. Weil $\sqrt[3]{5} = 5^{1:3}$ und $\sqrt{3} = 3^{1:2}$, so findet ihr $5^{1:3} + 3^{1:2} = 5^{2:6} + 3^{3:6} = \sqrt[6]{5^2} + \sqrt[6]{3^2} =$ (wenn ihr die Grössen unter dem Wurtzel-Zeichen würcklich zu ihrer Dignität erhebet) $\sqrt[6]{25} + \sqrt[6]{27}$.

Die 6. Aufgabe.

50. Irrational-Grössen auf eine schlechtere Art auszudrucken

Auflösung.

Weil $\sqrt[m]{a^n x^m} = a^{n:m} x^{m:m} = a^{n:m} x = x \sqrt[m]{a^n}$ (§. 42); so

1. Dividiret die Grösse unter dem Wurtzel-Zeichen durch eine Dignität von dem Grade, der einerley Exponenten mit der Wurtzel hat, als durch einen Cubum wenn die Irrational-Grösse eine Cubic-Wurtzel ist. Denn wenn dergleichen Division nicht angehet, so könnet ihr auch die Irrational-Grösse nicht schlechter ausdrucken
2. Den Quotienten lasset unter dem Wurtzel-Zeichen.
3. Vor das Wurtzel-Zeichen aber setzet die Wurtzel der Dignität, dadurch ihr dividiret.

So ist geschehen, was man verlangete.

Exempel.

$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8.3} = 2\sqrt[3]{3}$. Ingleichen

$\sqrt{18} = \sqrt{2.9} = 3\sqrt{2}$. Wiederum

$\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16.3} = 2\sqrt[4]{3}$.

Der 1. Zusatz.

51. Wenn ihr Irrational-Grössen von einerley Art solcher gestalt reduciret, und es bleibet unter dem Wurtzel-Zeichen einerley Grösse stehen; so verhalten sie sich gegen einander wie die Rational-Grössen vor dem Wurtzel-Zeichen. Z. E. $\sqrt{8} = \sqrt{4.2} = 2\sqrt{2}$ und $\sqrt{18} = \sqrt{9.2} = 3\sqrt{2}$. Derowegen ist $2\sqrt{2} : 3\sqrt{2} = 2:3$ (§. 75. *Arithm.*).

Der 2. Zusatz.

52. Derowegen könnet ihr durch gegenwärtige Aufgabe finden, ob zwey Irrational-Grössen eine Verhältnis gegen einander haben, die sich durch Rational-Grössen ausdrucken lässet, z. E. daß $\sqrt{8} : \sqrt{18} = 2:3$ (§. 51).

Der 3. Zusatz.

53. Weil ihr in solcher Gestalt reducirten Irrational-Grössen den Theil, welcher irrational bleibet, für den Nahmen der Einheit mit Recht haltet (§ 5. *& seqq. Arithm.*); so könnet ihr die Summe oder den Unterscheid der Irrational-Grössen finden, die unter dem

dem Wurtzel-Zeichen einerley Grössen haben und von einerley Art sind, wenn ihr die Rational-Grössen vor dem Wurtzel-Zeichen zusammen addiret oder von einander subtrahiret. So werdet ihr finden / daß $\sqrt{8}+\sqrt{18}=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$ und $\sqrt{18}-\sqrt{8}=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$. Ingleichen $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{3.8}+\sqrt[3]{3.27}=2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3}=5\sqrt[3]{3}$.

Der 4. Zusatz.

54. Wenn ihr die Grössen, die zum Theil rational, zum Theil irrational sind, gantz irrational machen sollet; so müsset ihr die Grösse vor dem Wurtzel-Zeichen zu der Dignität erheben, welche der Exponente über dem Wurtzel-Zeichen andeutet, und durch selbige die Grösse unter dem Wurtzel-Zeichen multipliciren. So werdet ihr finden, daß $5\sqrt{2}=\sqrt{2.25}=\sqrt{50}$ und $5\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3.5^3}=\sqrt[3]{3.125}=\sqrt[3]{375}$.

Die 1. Anmerckung.

55. Damit ihr erfahret / ob eine vorgegebene Zahl sich durch eine Dignität von einem gegebenen Grade dividiren lässet oder nicht; so dörffet ihr sie nur in diejenigen Zahlen zergliedern / durch deren Multiplication sie entstehet. Dieses aber geschiehet / wenn ihr sie mit den eintzelen Zahlen zu dividiren anfanget. Z. E. Ihr sollet auf solche Weise 3^{68} zergliedern / so findet ihr:

2	184
4	92
8	46
16	23

Die 2. Anmerckung.

56 Wem die Irrational-Rechnungen anfangs verdrüßlich fallen/ der kan sie so lange überschlagen / biß sie unten vorkommen. Er hüte sich aber mit Fleiß/ daß er nicht für unnütze Grillen halte/ wovon er den Nutzen nicht bald sehen kan. Ihr werdet im folgenden erfahren/ daß ich niemahls eine Lehre vortrage / die nicht ihren gewissen Nutzen hat.

Die 7. Aufgabe.

57. Eine Irrational-Grösse durch eine andere von einerley Art zu multipliciren.

Auflösung.

Weil $\sqrt[m]{a^n} = a^{n:m}$ und $\sqrt[m]{b^r} = b^{r:m}$ (§. 42); so ist $\sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[m]{b^r} = a^{n:m} b^{r:m}$ (§.20) $= \sqrt[m]{a^n b^r}$ (§.45) und erhellet hieraus folgende Regel:

1. Multipliciret die Gröſſen unter den Wurtzel-Zeichen (a^n und b^r) durch einander.
2. Vor das Product setzet das Wurtzel-Zeichen mit seinem Exponenten ($\sqrt[m]{}$).

So

So werdet ihr finden, daß $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$, und $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{35}$.

Zusatz.

58. Wenn ihr also eine Irrational-Zahl durch eine andere Irrational-Zahl dividiren sollet, so dörffet ihr nur die Zahlen unter dem Wurtzel-Zeichen durch einander dividiren. So werdet ihr finden, daß $\sqrt[3]{35} : \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{35} : \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{7}$ und $\sqrt{6} : \sqrt{3} = \sqrt{2}$.

Die 8. Aufgabe.

59. Eine Aufgabe algebraisch aufzulösen.

Auflösung.

1. Unterscheidet mit Fleiß die bekandten Grössen von den unbekandten und benennet jene mit den ersten, diese mit den letzten Buchstaben des Alphabets (§. 15). Wenn die Benennung geschehen, so
2. Suchet eine Gleichung, daß ihr nemlich eine Sache mit zweyerley Nahmen beleget: denn so müssen die beyden Werthe einander gleich seyn (§. 27. *Arithm.*). Ihr müsset aber so viel Gleichungen finden, als ihr unbekandte Grössen habet. Wenn es nicht angehet, so ist es ein Zeichen,

chen, daß ihr die eine unbekandte Grösse so groß annehmen könnet als ihr wollet. Und pfleget man dergleichen Aufgaben Underterminirte Aufgaben zu nennen. Es sind aber die Gleichungen entweder in der Aufgabe selbst angedeutet, oder ihr müsset sie aus ihren Umständen durch Hülffe derjenigen Lehrsätze suchen, welche von der Gleichheit handeln.

3. Wenn in den Gleichungen bekandte und unbekandte Grössen mit einander vermenget sind, so müsset ihr sie dergestalt einrichten, daß auf einer Seite lauter bekandte, auf der anderen aber nur eine unbekandte stehen bleibet: welches geschiehet, wenn ihr die Grössen, welche subtrahiret sind, durch addiren; welche addiret sind, durch subtrahiren; welche andere multipliciren, durch dividiren; welche andere dividiren, durch multipliciren wegbringet oder auch die Wurtzeln zu ihren Dignitäten erhebet, oder aus den Dignitäten die gehörigen Wurtzeln ausziehet: damit ihr immer eine Gleichheit erhaltet (§. 30. 31. 32. 33. *Arithm.* & §. 36. *Algebr.*).

Anmerckung.

60. Unerachtet die Einrichtung der gefundenen Gleichung sehr offte auf beschriebene Weise geschehen kan; so gehet es doch nicht in allen Fällen an. Wir wollen aber erst diese Regeln uns durch Exempel bekandt machen / ehe wir zu anderen schreiten. Denn die Algebra lernet man nicht so wohl durch Regeln / als durch Exempel.

Die

Die 9. Aufgabe.

61. Aus der gegebenen Summe zweyer Grössen und ihrem Unterscheide die Grössen selber zu finden.

Auflösung.

Es sey die Summe $= a$ die kleine Grösse $= x$
der Unterscheid $= b$ die grosse $= y$.

So ist,

$x + y = a$ (§. 15. *Arithm.*) $y - x = b$ (§. 18. *Arithm*)

$x \quad x$ *subtr.*

$y = a - x$

$x \quad x$ *add.*

$y = b + x$

demnach

$a - x = b + x$ (§. 28. *Arithm.*)

$x \quad x$ *add.*

$a = b + 2x$

$b \quad b$ *subtr.*

$a - b = 2x$

2 *div.*

$$\frac{a - b}{2} = x$$

Folgends ist die grössere $y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

Regel.

Ziehet den Unterscheid der beyden Grös-

sen

sen (*b*) von der Summe (*a*) ab. Den Rest dividiret durch zwey; so ist der Quotient die kleine Grösse (*x*). Addiret den Unterscheid zu der Summe; so ist die Helffte davon die grosse Grösse (*y*).

Z. E. Es sey $a = 30$, $b = 8$, so ist $(a - b) : 2 = (30 - 8) : 2 = 22 : 2 = 11$, und $(a + b) : 2 = (30 + 8) : 2 = 38 : 2 = 19$.

Probe.

Denn $19 - 11 = 8$ und $19 + 11 = 30$. Der allgemein:

$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$	$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$
$\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$	$\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$
Summe *a*	Unterscheid *b*

Anmerckung.

62. Ihr könnet jederzeit aus der letzten Gleichung, eine Regel machen/ dadurch die Aufgaben in allen vorkommenden Fällen aufgelöset werden kan. Wenn ihr vor die Buchstaben die Nahmen der Sachen setzet/ die sie bedeuten/ und an stat der Zeichen die Rechnungs-Arten benennet/ die sie andeuten: allein der Kürtze halber werde ich ins künfftige keine Regel versetzen/ wenn es nicht besondere Umstände erfordern. Und dieses thue ich um so viel lieber/ weil man die Exempel in Zahlen viel hurtiger auflösen kan/ wenn man die Ziffern in die Stelle der Buchstaben setzet/ als wenn man nach der Regel verfähret. Auch ist zu merken/ daß öffters in den Gleichungen/ da noch bekandtes und unbekandtes mit einander vermenget ist/ nützliche Lehrsätze enthalten sind. Z. E. Aus der Gleichung $a - b = x$ erhellet folgender Lehrsatz:

Wenn man von der Summe zweyer Grössen ihren Unterscheid abziehet; so ist der Rest zweymahl so groß als die kleinere.

Die

Die 10. Aufgabe.

63. Eine Zahl zu finden, deren Helffte, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ zusammen um 1 grösser sind als die Zahl selbst.

Auflösung.

Es sey die gesuchte Zahl $= x$, so ist

$$x + 1 = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{4}x$$
$$= 12x + 8x + 6x$$

$$24$$
$$= \tfrac{26}{24}x \text{ (§. 82 } \textit{Arithm.}\text{)}$$
$$= x + \tfrac{1}{12}x \text{ (§. 78. 80. } \textit{Arithm.}\text{)}.$$

$$1 = \tfrac{1}{12}x \quad | \cdot 12 \textit{ mult.}$$

$$12 = x$$

Probe. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 6 + 4 + 3 = 13$.

Es ist demnach nicht mehr als die einige Zahl 12, welche diese Eigenschafft hat.

Die 11. Aufgabe.

64. Aus der gegebenen Summe zweyer Zahlen und dem Producte einer Zahl in die andere, die Zahlen selber zu finden.

Auflösung.

Es sey die Summe $= a$ die halbe Differentz $= x$
das Product $= b$;

so ist die grosse Zahl $\frac{1}{2}a + x$
die kleine $\frac{1}{2}a - x$ } §. 61

Und also $\frac{1}{4}aa - xx = b$ (§. 32)

xx xx add.

$\frac{1}{4}aa = b + xx$

b b subtr.

$\frac{1}{4}aa - b = xx$

rad. extr.

$\sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)} = x$

Also ist die grosse Zahl $\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$; die kleine $\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$.

Es sey $a = 14$, $b = 48$, so ist $\sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)} = \sqrt{(94 - 48)} = 1$, folgends die grosse Zahl $\frac{1}{2}a + x = 7 + 1 = 8$ und die kleine $\frac{1}{2}a - x = 7 - 1 = 6$.

Probe. Denn $8 + 6 = 14$ und $6 \cdot 8 = 48$.

Anmerckung.

65. Es ist an der Benennung öffters viel gelegen. Denn wenn ihr in gegenwärtiger Aufgabe die grosse Zahl x, die kleine y nennet: kommet ihr auf eine Gleichung, die ihr noch nicht aufzulösen vermögend seyd. Mercket dabey den Lehrsatz, den die Gleichung $\frac{1}{4}aa = b + xx$ an die Hand giebt:

Der Qvadrat der halben Summe zweyer Grössen ist gleich dem Producte derselben in einander und dem Qvadrate des halben Unterscheides.

Die 12. Aufgabe.

66. **Es wird gegeben die Summe gleicher Dignitäten zweyer Grössen, und der Unterscheid selbiger Dignitäten, ihr sollet die Grössen selbst finden.**

Auf-

Auflösung.

Es sey die Summe $= a$ die kleine Grösse $= x$
der Unterscheid $= b$ die grosse $= y$
so ist

$$x^m + y^m = a \qquad y^m - x^m = b$$

$$y^m = a - x^m \qquad y^m = b + x^m$$

Folgends

$$a - x^m = b + x^m$$

$$a = b + 2x^m$$

$$a - b = 2x^m$$

$$(a - b) : 2 = x^m$$

$$\sqrt[m]{(\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)} = x$$

Es sey $m = 2, a = 97, b = 65$; so ist $x = \sqrt{(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)} = \sqrt{(48\frac{1}{2} - 32\frac{1}{2})} = \sqrt{16} = 4$ und $y = \sqrt{(b + x^2)} = \sqrt{(65 + 16)} = \sqrt{81} = 9$.
Probe: Denn $81 + 16 = 97$ und $81 - 16 = 65$.

Die 13. Aufgabe.

67. Zwey Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß das Product einer jeden in die Quadrat-Wurtzel der anderen einer gegebenen Zahl gleich ist.

Auflösung.

Es sey das eine Product $= a$ die eine Zahl $= x$
das andere $= b$ die andere $= y$

So ist $x\sqrt{y} = a$ $\quad y\sqrt{x} = b$

$x^2 y = a^2$ $\quad y^2 x = b^2$

$x = b^2 : y^2$

$x^2 = b^4 : y^4$

Wenn ihr den Werth von x^2 in die erste Gleichung zur Lincken $x^2 y$ setzet, so bekommet ihr

$b^4 y : y^4 = b^4 : y^3 = a^2$

y^3 *mult.*

$b^4 = a^2 y^3$

$b^4 : a^2 = y^3$

$\sqrt[3]{(b^4 : a^2)} = y$

Es sey $a = 18$, $b = 12$, so ist $y = \sqrt[3]{(b^4 : a^2)}$ $= \sqrt[3]{(20736 : 234)} = \sqrt[3]{64} = 4$ und $x = b^2 : y^2 = 144 : 16 = 9$.

Probe: Denn $9.2 = 18$ und $4.3 = 12$.

Die 14. Aufgabe.

68. Aus der gegebenen Summe zweyer Grössen und der Differentz ihrer Qvadrate die beyden Grössen zu finden.

Auflösung.

Es sey die Summe $= a$ die halbe Differentz $= y$

die Differentz der Qvadr. $= b$

So

So ist die eine Grösse $\frac{1}{2}a + y$
Die andere $\frac{1}{2}a - y$ (§. 61).
Das Qvadrat der ersten $\frac{1}{4}aa + ay + yy$
Das Qvadrat der andern $\frac{1}{4}aa - ay + yy$

Die Differentz $b = 2ay$

$2a$

folgends $b : 2a = y$

Es sey $b = 40$, $a = 10$; so ist $y = 40 : 20 = 2$;
folgends die eine Zahl $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$,
die andere $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.

Probe: Denn $7 + 3 = 10$ und $49 - 9 = 40$.

Die 15. Aufgabe.

69. Aus der gegebenen Summe zweyer Grössen und der Summe ihrer Qvadrate die beyden Grössen zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste Summe $= a$ die eine Grösse $\frac{1}{2}a + y$ (§. 61).
Die andere $= b$ die andere $\frac{1}{2}a - y$
So ist das Qvadrat der ersten $\frac{1}{4}aa + ay + yy$
der anderen $\frac{1}{4}aa - ay + yy$

Die Summe $b = \frac{1}{2}aa + 2yy$

Folgends $b - \frac{1}{2}aa = 2yy$

$\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}aa = yy$

$\sqrt{(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}aa)} = y$

Es sey $a = 10$, $b = 58$, so ist $V(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}aa) = V(29-25) = V\,4 = 2$ folgends $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$ und $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.

Probe: Denn $7 + 3 = 10$ und $49 + 9 = 58$.

Die 16. Aufgabe.

70. Zwey Zahlen zu finden, deren Product einer gegebenen Zahl gleich ist, das Quadrat aber der Summe zu dem Quadrate der Differenz beyder Zahlen eine gegebene Verhältnis hat.

Auflösung.

Es sey das Product $= a$ die Summe $= 2x$ die gegebene Verhältnis $= b:c$ der Unterscheid $= 2y$

so ist die eine Zahl $x + y$

die andere $x - y$.

und also

$xx - yy = a$ $\quad b:c = 4x^2 : 4y^2 = x^2 : y^2$ (§. 75. *Arithm.*).

$xx = a + y^2$ $\quad by^2 = cx^2$ (§. 109. *Arithm.*).

$by^2 : c = x^2$

Folgends

$a + y^2 = by^2 : c$

$ac + cy^2 = by^2$

$ac = by^2 - cy^2$

$ac : (b - c) = y^2$

$V\,ac : V\,(b-c) = y$

Es sey $a = 96$, $b : c = 25 : 1$, so ist $y = \sqrt{96} : \sqrt{(25-1)} = \sqrt{4}$ (§. 58) $= 2$; und $x = \sqrt{(a+y^2)} = \sqrt{(96+4)} = \sqrt{100} = 10$: folgends $x+y = 10+2 = 12$ und $x-y = 10-2 = 8$.

Probe: $12 \cdot 8 = 96$ und $25 : 1 = 400 : 16$.

Die 17. Aufgabe.

71. Aus der gegebenen Tage-Reise zweyer Bothen und der Zeit, da der andere dem ersten nachgehet, die Zeit zu finden, in welcher er ihn einholet.

Auflösung.

Es sey die Tage-Reise des ersten $= a$ die gesuchte Zeit $= x$

des anderen $= b$

die gegebene Zeit $= c$

So ist die Reise des ersten in der gegebenen Zeit $= ac$, in der gesuchten $= ax$. Die Reise des anderen in der letzteren Zeit $= bx$. Da nun beyde einen gleichen Weg zurücke geleget; so ist

$$ac + ax = bx$$

$ax \quad ax$ subtr.

$$ac = bx - ax = (b-a)x$$

$b-a$ div.

$$ac : (b-a) = x$$

Es sey $a = 6$, $b = 8$; $c = 4$; so ist $x = 24 : (8-6) = \frac{24}{2} = 12$.

Probe: Denn $12 \cdot 8 = 96$ und $4 \cdot 6 + 12 \cdot 6 = 24 + 72 = 96$.

Anmerckung.

72. Weil man in Auflösung dieser Aufgabe weder auf den Begriff der Tage-Reise/ noch der Bothen siehet; so ist daraus abzunehmen/ daß sie bey der Bewegung aller Cörper kan angebracht werden.

Die 18. Aufgabe.

73. Aus der gegebenen Tage Reise eines Bothens und der Zeit, da er hinweg ist, die Tage-Reise eines anderen Bothens zu bestimmen, der ihn in einer gegebenen Zeit einholen sol.

Auflösung.

Es sey die Tage-Reise des ersten $= a$ des anderen $= x$

die verflossene Zeit $= b$

die gegebene Zeit $= c$

so findet man wie in der vorhergehenden Aufgabe

$$\frac{ab + ac = cx}{\frac{ab}{c} + a = x}$$

Es sey $a = 6, b = 4, c = 12$; so ist $x = \frac{24}{12} + 6 = 2 + 6 = 8$.

Probe: Denn $24 + 72 = 96$ u. $8.12 = 96$.

Die 19. Aufgabe.

74. Aus der gegebenen Weite zweyer Oerter von einander, aus welchen zu gleicher Zeit zwey Bothen ausreisen, und der Tage-Reise eines jeden, die Zeit zu bestimmen, da sie einander begegnen.

Auf-

Auflösung.

Es sey die Weite = a die gesuchte Zeit = x
die Tage-Reise des ersten = b
des anderen = c

So ist der Weg des ersten in der zu bestimmenden Zeit = bx, des anderen = cx; folgends, weil beyde zusammen die gantze Weite der Oerter von einander durchreiset,

$$bx + cx = a$$
$$\text{das ist } (b+c)x = a$$
$$x = a : (b+c)$$

Es sey $a = 120$, $b = 6$, $c = 4$; so ist $x = 120 : (6+4) = 120 : 10 = 12$. Sie begegnen also einander in dem zwölften Tage.

Probe: Denn $6.12 + 4.12 = 72 + 48 = 120$.

Die 20. Aufgabe.

75. Aus dem gegebenen Werthe einer Kanne guten Weines zu bestimmen, wie viel man Wasser darunter mischen muß, damit man das Maaß um einen verlangten geringeren Preiß geben kan.

Auflösung.

Der höhere Preiß sey = a das Wasser = x
der geringere = b
das Kannen-Maaß = 1

Da nun der Preiß von 1 = b, so ist der Preiß von $1 + x = b + bx$ (§. 113. *Arithm.*) und daher, weil das Wasser x nichts gilt,

$b+bx = a$ (§. 28. *Arithm.*

$bx = a-b$

$x = (a-b) : b$.

Es sey $a = 16$, $b = 10$; so ist $x = (16-10) : 10 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Probe: Denn wenn $1\frac{3}{5}$ Kannen 16 Groschen kommen; so kommet eine Kanne 10 Groschen (§. 113. *Arithm.*).

Die 21. Aufgabe.

76. Aus dem gegebenen Preisse zweyer Weine von verschiedener Güte zu bestimmen, wie viel man von dem geringeren zu dem besseren giessen muß, damit man ihn vor einen verlangten Preiß geben kan.

Auflösung.

Es sey der Preiß des guten $= a$
des schlechten $= b$
des vermischten $= c$
das Kannenmaß $= 1$

die Grösse des schlechten $= x$
so ist sein Preiß $= bx$
die Grösse des guten $= 1-x$
sein Preiß $= a-ax$

Fol-

Folgends.

$a - ax + bx = c$ (§. 28. *Arithm.*).

$ax \qquad ax$

$a + bx = ax + c$

$bx \qquad bx$

$a = ax - bx + c$

$c \qquad c$

$a - c = ax - bx = (a - b)x$

$a - b$ divi-

$(a - c) : (a - b) = x.$

Es sey $a = 16$, $b = 10$, $c = 12$; so ist $x = (16 - 12) : (16 - 10) = 4 : 6 = \frac{2}{3}$. Demnach werden von dem schlechten $\frac{2}{3}$ und von dem guten $\frac{1}{3}$ genommen.

Probe: Denn $\frac{1}{3}$ vom guten kommet $5\frac{1}{3}$ Gr. und $\frac{2}{3}$ vom schlechten $6\frac{2}{3}$ Gr. folgends der vermischte 12 Gr.

Anmerckung.

77. Die auf besondere Arten der Fälle gerichtete Aufgaben sind schweerer aufzulösen / als die allgemeineren von Zahlen und Grössen: Denn man hat hier viel besondere Umstände / welche zur Auflösung der Aufgabe nichts beytragen und es ist öfters / sonderlich für Anfänger nicht eine geringe Mühe / wenn man die Aufgaben von den besonderen und zur Aflösung nicht dienenden Umständen befreyen sol.

Die 6. Erklärung.

78. Wenn die Wurzel einer Dignität oder Potentz aus zwey Theilen bestehet,

wenn

nennet man sie eine Binomische Wurzel, als $a+b$. Bestehet sie aus drey Theilen, als $a+b+c$; so heisset sie eine Trinomische Wurzel: wenn sie aus vier Theilen bestehet: eine Qvadrinomische Wurzel u. s. w. überhaupt aber nennet man sie eine Polynomische Wurzel, wenn sie aus mehr als zwey Theilen bestehet.

Die 22. Aufgabe.

79. Die Natur des Qvadrates oder der anderen Dignität einer Binomischen Wurzel zu finden.

Auflösung.

Ihr verlanget zu wissen, wie das Qvadrat einer Binomischen Wurzel enstehen kan, (§. 4. *Method. Mathem.*). Multipliciret demnach die Binomische Wurzel $a+b$ durch sich selbst, so wird das Product zeigen, aus was für Theilen das Qvadrat zusammen gesetzet wird, und wie diese Theile des Qvadrates aus den Theilen der Wurzel entstehen.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline +ab+b \\ a^2+ab \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

$a^2+2ab+b^2$ Qvadrat der Binomischen Wurzel.

Lehr-

Lehrsatz.

Das Qvadrat der Binomischen Wurzel begreiffet in sich die Qvadrate der beyden Theile (a^2 und b^2) und ein Product ($2ab$) aus dem einen Theile zwey mahl genommen ($2a$) in den anderen (b).

Anmerckung.

80. Ihr habet hier auf eine sehr leichte Art den anderen Lehrsatz der Rechen-Kunst (§. 93. *Arithm.*) gefunden / daraus wir die Ausziehung der Qvadrat-Wurtzel (§. 97. *Arithm.*) hergeleitet. Wenn ihr aber dieselben Regeln vergessen hättet / könnte euch dieses allgemeine Exempel $a^2+2ab+b^2$ an stat derselben dienen. Denn ihr sehet / daß / wenn ihr in der ersten Classe zur Lincken das darinnen befindliche Qvadrat a^2 abziehet / ihr den ersten Theil der Wurtzel a habet. Wollet ihr nun den anderen finden / so müsset ihr mit a / das ist / mit dem gefundenen Qvotienten zweymahl genommen / die folgende Zahl $2ab$ dividiren / und hernach nicht allein das Product aus dem Divisore $2a$ in den neuen Qvotienten b / sondern auch das Qvadrat des neuen Qvotienten b^2 subtrahiren.

Zusatz.

81. Setzet $a = a+b$ und $b = c$, so kommet für das Qvadrat der Trinomischen Wurtzel $(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$. Und also müsset ihr zu dem Binomischen Qvadrate noch das Product aus der Summe der beyden Theile der Binomischen Wurtzel zwey mahl genommen in den dritten Theil und das Qvadrat des dritten Theiles addiren. Setzet $a = a+b+c$, und $b = d$, so kommet für das Qvadrat der Qvadrinomischen Wurtzel

(a+

$(a+b+c)^2+2(a+b+c)\,d+d^2$. Derowegen müsset ihr zu dem Qvadrate der Trinomischen Wurtzel noch das Product aus der Summe der ersten drey Theile zwey mahl genommen in den vierdten Theil und das Qvadrat des vierdten Theiles addiren. Solchergestalt sehet ihr, daß ihr nach der Binomischen Formul auch das Qvadrat einer jeden Polynomischen Wurtzel finden, ingleichen aus einer gegebenen Zahl eine jede Polynomische Wurtzel ziehen könnet. Denn $(a+b+c+d+e$ &c.$)^2 = a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2+2(a+b+c+d)e+e^2$ u. s. w. unendlich fort.

Die 7. Erklärung.

82. Eine unreine Qvadratische Gleichung (Æquatio quadratica affecta) wird genennet, in welcher $x^2 \mp ax = \mp b^2$.

Die 23. Aufgabe.

83. Eine unreine Qvadratische Gleichung aufzulösen.

Auflösung.

Weil $x^2 \mp ax = b^2$, so nehmet x für den einen Theil einer Binomischen Wurtzel an. Alsdenn wird a die bekandte Grösse des anderen Gliedes, der andere Theil der Wurtzel zwey mahl genommen, und also $\frac{1}{2}a$ der andere Theil der Wurtzel seyn: folgends fehlet zu einem vollkommenen Qvadrate das

Qvad-

Qvadrat von $\frac{1}{2}a$, nemlich $\frac{1}{4}aa$ (§. 79). Wenn ihr nun solches beyderseits addiret; so lässet sich die Qvadrat-Wurzel ausziehen und die gegebene Gleichung völlig einrichten.

Es sey $x^2 + ax = b^2$

$\frac{1}{4}a^2 \quad \frac{1}{4}a^2$

$x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2$

$x + \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$

$x = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)} - \frac{1}{2}a$

Es sey ferner

$x^2 - ax = b^2$

so ist $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2$

$x - \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$

oder $\frac{1}{2}a - x$

folgends $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$

Denn weil $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$ grösser als $\frac{1}{2}a$ ist; so gehet die andere Wurzel $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$ nicht an.

Es sey endlich

$x^2 - ax = -b^2$

so ist $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2$

$x - \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$

oder $\frac{1}{2}a - x$

$x = a\frac{1}{2} \mp \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$ Weil

Weil $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$ kleiner als $\frac{1}{2}a$; so lässet es sich von $\frac{1}{2}a$ subtrahiren, und also gehen beyde Wurtzeln an.

Nemlich dieses findet stat, wenn man zwey unbekandte Grössen hat und es gilt gleich viel, welche von beyden man x nennet, indem immer einerley Gleichungen heraus kommen.

Anmerckung.

84. Den Nutzen dieser Regel werdet ihr inskünftige überflüßig sehen. Jetzt vergnüget mich dieselbe durch die beyden folgenden Aufgaben zu erläutern.

Die 24. Aufgabe.

85. Zwey Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß ihr Product, ihre Summe und die Differenz ihrer Qvadrate einander gleich sind.

Auflösung.

Es sey die grosse Zahl $= x$
die kleine $= y$, so ist

$$x^2 - y^2 = xy \qquad xy = x + y$$

$$xy - y = x$$

$$y = x : (x - 1)$$

Wenn ihr den Werth y in der ersten Gleichung an seine Stelle setzet, so bekommet ihr, weil $y^2 = x^2 : (x-1)^2$ und $xy = x^2 : (x-1)$,

x^2

$x^2 - x^2 = x^2$

$x^2 - 2x + 1 \quad x - 1$

$x^2 - 2x + 1$ mult.

$x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 = x^3 - x^2$

$x^4 - 3x^3 = - x^2$

x^2 div.

$x^2 - 3x = - 1$

$\frac{9}{4} \quad \frac{9}{4}$ (§. 83).

$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$

$x - \frac{3}{2} = V\frac{5}{4} = \frac{1}{2}V5$

oder $\frac{3}{2} - x =$

$x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}V5$

oder $x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}V5$

Ferner weil $xy - x = y$, so ist $x = y : (y - 1)$. Wenn ihr diesen Werth in der ersten Gleichung in die Stelle x setzet, so bekommet ihr

$y^2 - y^2 = y^2$

$y^2 - 2y + 1 \quad y - 1$

und wenn ihr die Reduction wie vorhin anstellet, so findet ihr endlich $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}V5$, oder $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}V5$.

Weil $\frac{1}{2}V5$ grösser ist als $\frac{1}{2}$, so findet bloß die erste Wurzel stat. Derowegen weil diese allein mit $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}V5$, nicht aber mit $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}V5$; hingegen die falsche Wurzel $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}V5$

mit $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ die Probe hält; so sind die verlangten Zahlen $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Probe: Denn $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = 2 + \sqrt{5}$, und $(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}) = 2 + \sqrt{5}$, ingleichen $\frac{2}{4} + \frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{5}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{5}{4} = 2 + \sqrt{5}$. Gleichergestalt ist $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = 2 - \sqrt{5}$, und $(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}) = 2 - \sqrt{5}$, ingleichen $\frac{2}{4} - \frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{5}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{5}{4} = 2 - \sqrt{5}$.

Die 25. Aufgabe.

86. Aus dem gegebenen Producte zweyer Grössen und ihrer Differenz die Grössen selber zu finden.

Auflösung.

Es sey das Product $= a$ die gröste Grösse $= x$
die Differenz $= b$ die andere $= y$

So ist,

$a = xy$ $\quad$ $b = x - y$

$a : y = x$ $\quad$ $b + y = x$

Folgends $a : y = b + y$

y

$a = by + y^2$

$\frac{1}{4}b^2$ $\quad$ $\frac{1}{4}b^2$ (§. 83)

$a + \frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{4}b^2 + by + y^2$

$\sqrt{(a + \frac{1}{4}b^2)} = \frac{1}{2}b + y$

$\sqrt{(a + \frac{1}{4}b^2)} - \frac{1}{2}b = y$

Es sey $a = 40, b = 3$, so ist $y = V(40 + \frac{9}{4}) - \frac{3}{2} = V(169:4) - \frac{3}{2} = \frac{13}{2} - \frac{3}{2} = \frac{10}{2} = 5$, und demnach $x = 8$.

Probe: Denn $5 \cdot 8 = 40$ und $8 - 5 = 3$.

Die 26. Aufgabe.

87. Die Natur der dritten Dignität einer Binomischen Wurtzel zu finden.

Auflösung.

Ihr habet nur die andere Dignität,

$$a^2 + 2ab + b^2$$

durch die Wurtzel $a + b$ zu multiplicire

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ \hline + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \hline \end{array} \quad (\S.32)$$

so ist $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ die verlangte dritte Dignität (§. 78).

Lehrsatz.

Die dritte Dignität einer Binomischen Wurtzel enthält in sich dritte Dignität der beyden Theile (a^3 und b^3) und ein Product aus dem Quadrate des ersten Theiles drey mahl genommen ($3a^2$) in den anderen (b), nebst noch einem anderen Producte aus dem ersten Theile drey mahl genommen ($3a$) in das Quadrat des anderen Theiles (b^2).

Die 1. Anmerckung.

88. Ihr habet hier abermahls auf eine sehr leichte Art den 3 Lehrsatz der Rechen-Kunst (§. 99. *Arithm.*) gefunden, daraus die Ausziehung der Cubic-Wurtzel hergeleitet worden (§. 103. *Arithm.*). Wenn ihr aber die dort gegebenen Regeln

vergessen hättet/könnte euch das allgemeine Exempel $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ an deren stat dienen. Denn ihr sehet/daß/wenn ihr in der ersten Classe zur Lincken die daselbst befindliche dritte Dignität a^3 abziehet/ihr den ersten Theil der Wurtzel a habet. Wenn ihr nun aus den übrigen Gliedern den anderen Theil finden wollet/ müsset ihr das erste zur Lincken $3a^2b$ durch das Qvadrat des ersten drey mahl genommen $(3a^2)$ dividiren und hernach nicht allein das Product aus diesem Divisore $(3a^2)$ in den neuen Qvotienten (b)/sondern auch das Product aus dem Qvadrate des neuen Qvotientens (b^2) in den vorhergehenden dreymahl genommen $(3a)$ und endlich die dritte Dignität des neuen Qvotientens (b^3) abziehen.

Zusatz.

89. Setzet $a = a + b$ und $b = c$, so kommet für die dritte Dignität der Trinomischen Wurtzel $a + b + c$ heraus $(a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$, und also müsset ihr zu der Dignität der Binomischen Wurtzel noch das Product aus dem Qvadrate der Binomischen Wurtzel dreymahl genommen $3(a+b)^2$ in den dritten Theil c, das Product aus der Binomischen Wurtzel dreymahl genommen $3(a+b)$ in das Qvadrat des dritten Theiles c^2 und die dritte Dignität desselben Theiles c^3 addiren. Setzet $a = a + b + c$ und $b = d$, so ist die dritte Dignität der Qvadrinomischen Wurtzel $(a+b+c)^3 + 3(a+b+c)^2d + 3(a+b+c)d^2 + d^3$; folgends müsset ihr noch zu der Dignität der Trinomischen Wurtzel $(a+b+c)^3$ das Product aus dem Qvadrate der Trinomischen Wurtzel dreymahl genommen $3(a+b+c)^2$ in den vierdten

Theil

Theil d, das Product aus der Trinomischen Wurtzel dreymahl genommen 3 $(a+b+c)$ in das Qvadrat des vierdten Theiles d^2 und die dritte Dignität des vierdten Theiles d^3 addiren. Solcher gestalt sehet ihr, daß ihr nach der Binomischen Regel auch die dritte Dignität einer jeden Polynomischen Wurtzel finden, ingleichen aus einer gegebenen Zahl eine jede Polynomische Cubic-Wurtzel ziehen könnet. Denn $+(a+b+c+d+e\ \&c.)^3 = a^3 +3\ a^2b+3\ ab^2+b^3+3\ (a+b)^2\ c+3\ (a+b)\ c^2+c^3+3\ (a+b+c)^2\ d+3\ (a+b+c)\ d^2+d^3+3\ (a+b+c+d)^2\ e+3\ (a+b+c+d)\ e^2+e^3$ u. s. w. unendlich fort.

Die 2. Anmerckung.

90. Auf eben solche Weise könnet ihr für die höheren Dignitäten Regeln finden. Und unerachtet ich in der folgenden Aufgabe zeigen werde/ wie ihr an stat unendlicher Regeln für unendliche Dignitäten/zu denen eine Grösse erhoben werden kan/eine einige finden könnet; so wird euch die Mühe doch nicht verdrüssen/ wenn ihr auf gleiche Art die Natur der vierdten/fünften/ sechsten Dignität u. s. w. untersuchet. Denn diese Untersuchung selbst wird euch dienen die allgemeine Regel zu erfinden.

Die 27. Aufgabe.

91. Eine allgemeine Regel zu finden, nach welcher jede Binomische Wurtzel zu jeder verlangten Dignität erhoben werden kan.

Auflösung.

Wenn ihr die Binomische Wurtzel nach und nach zu ihren Dignitäten erhebet, wie beygefügte Taffel ausweiset.

Anfangs-Gründe

$1a$	$1b$								
$1a^2$	$2ab$	$1b^2$							
$1a^3$	$3a^2b$	$3ab^2$	$1b^3$						
$1a^4$	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	$1b^4$					
$1a^5$	$5a^4b$	$10a^3b^2$	$10a^2b^3$	$5ab^4$	$1b^5$				
$1a^6$	$6a^5b$	$15a^4b^2$	$20a^3b^3$	$15a^2b^4$	$6ab^5$	$1b^6$			
$1a^7$	$7a^6b$	$21a^5b^2$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21a^2b^5$	$7ab^6$	$1b^7$		
$1a^8$	$8a^7b$	$28a^6b^2$	$56a^5b^3$	$70a^4b^4$	$56a^3b^5$	$28a^2b^6$	$8ab^7$	$1b^8$	
$1a^9$	$9a^8b$	$36a^7b^2$	$84a^6b^3$	$126a^5b^4$	$126a^4b^5$	$84a^3b^6$	$36a^2b^7$	$9ab^8$	$1b^9$
$1a^{10}$	$10a^9b$	$45a^8b^2$	$120a^7b^3$	$210a^6b^4$	$252a^5b^5$	$210a^4b^6$	$120a^3b^7$	$45a^2b^8$	$10ab^9$	$1b^{10}$

1542

so werdet ihr wahrnehmen, daß eine jede Dignität aus verschiedenen Producten zusammen gesetzet ist, und diese Producte durch verschiedene Zahlen multipliciret werden. Es entstehen aber diese Producte, wenn ihr jeden Theil der Wurtzel zu allen niedrigeren Dignitäten als die gegebene ist, erhebet, und sie verkehret in einander multipliciret. Z. E. in der sechsten Dignität sind alle Dignitäten von 1 bis zu der sechsten der beyden Theile $a^6, a^5, a^4, a^3, a^2, a, 1$. und $1, b, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6$. Multipliciret die erste Reihe in die andere, so bekommet ihr $a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6$, das ist, alle Producte, woraus die sechste Dignität bestehet, ausser denen Zahlen, welche sie multipliciren, und nach dem Exempel des Oughtred (Clavis Mathematicæ c. 12. §. 6. p. m. 38.) sonderlich von denen Engelländern Unciæ genennet werden. Derowegen wenn der Exponente m ist, so sind die Producte $a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3 + a^{m-4}b^4 + a^{m-5}b^5 + a^{m-6}b^6$ u. s. w. unendlich fort.

Die Unzen.

$1 + 1$
$1 + 2 + 1$
$1 + 3 + 3 + 1$
$1 + 4 + 6 + 4 + 1$
$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1$
$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1$
$1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1$ &c.

werden gefunden, wenn ihr die Exponenten der Dignitäten, die in einander multipliciret werden, unter einander schreibet und den Bruch aus den zwey ersten Zahlen für die Untze des anderen Gliedes, den Bruch aus den beyden ersten oberen und beyden ersten unteren Zahlen zur Untze des dritten Gliedes nehmet ꝛc. Z.E. Es sollen die Untzen für die sechste Dignität gefunden werden: so schreibet die angeführten Exponenten dergestalt unter einander:

6. 5. 4. 3. 2. 1.
1. 2. 3. 4. 5. 6

Alsdenn ist $\frac{6}{1} = 6$ die Untze des anderen Gliedes, $\frac{6.5}{1.2} = 15$ die Untze des dritten, $\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$ die Untze des vierdten, $\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = 15$ die Untze des fünfften, $\frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5} = 6$ die Untze des sechsten, und endlich $\frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6} = 1$ die Untze des letzten Gliedes.

Auf eben solche Art werden die Untzen gefunden, wenn die Exponenten undeterminiret sind. Man schreibet sie nemlich dergestalt untereinander:

$\frac{m.\ m-1.\ m-2.\ m-3.\ m-4.\ m-5.\ 2c.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}$

und nimmet $\frac{m}{1}$ für die Unze des anderen Gliedes; $\frac{m.\ m-1}{1.\ 2.}$ für die Unze des dritten, $\frac{m.\ m-1.\ m-2}{1.\ 2.\ 3}$ für die Unze des vierdten, $\frac{m.\ m-1.\ m-2.\ m-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$ für die Unze des fünfften, $\frac{m.\ m-1.\ m-2.\ m-3.\ m-4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$ für die Unze des sechsten, $\frac{m.\ m-1.\ m-2.\ m-3.\ m-4.\ m-5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}$ für die Unze des siebenden ꝛc.

Wenn ihr nun diese Uncias in die oben gefundene Producte multipliciret; so bekommet ihr die Dignität m von $a+b$.

$a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m.\ m-1}{1.\ 2} a^{m-2} b^2 + \frac{m.\ m-1.\ m-2}{1.\ 2.\ 3} a^{m-3} b^3 + \frac{m.\ m-1.\ m-2.\ m-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4} a^{m-4} b^4 + \frac{m.\ m-1}{1.\ 2.} \cdot \frac{m-2.\ m-3.\ m-4}{3.\ 4.\ 5} a^{m-5} b^5 + \frac{m.\ m-1.\ m-2.\ m-3.\ m-4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} \cdot \frac{m-5}{6} a^{m-6} b^6$ &c.

Das ist, weil $a^{m-1} = a^m : a$, $a^{m-2} = a^m : a^2$, $a^{m-3} = a^m : a^3$, $a^{m-4} = a^m : a^4$ &c. (§. 39),

$$a^m + \frac{m}{1}a^m b + \frac{m.m-1}{1.2}a^m b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^m b^3$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}a^m b^4 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}$$

$$\frac{m-4}{5.}a^m b^5 + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.3.4.5.6}$$

$a^m b^6$ &c.

$$\overline{a^6}$$

Wenn ihr nun ferner $a = P$ und $b : a = Q$, das erste Glied $= A$, das andere $= B$; das dritte $= C$, das vierdte $= D$, das fünffte $=$ E u.s.w. setzet; so findet ihr endlich $(P+PQ)^m = P^m + \frac{m}{1}AQ + \frac{m-1}{2.}BQ + \frac{m-2}{3.}CQ + \frac{m-3}{4}$

$$DQ + \frac{m-4}{5.}EQ + \frac{m-5}{6}FQ$$ u. s. w. unendlich fort.

Also habet ihr eine allgemeine Regel gefunden, nach welcher ihr eine jede Binomische Wurtzel zu einer jeden verlangten Dignität erheben könnet.

Die 1. Anmerckung.

92. Ihr verlanget die vierdte Dignität von 18 oder

10+8, so ist $m = 4, P = 10, Q = 8 : 10 = 4 : 5$
folgends $P^m = 10^4 = 10000 = A$

m $AQ = 4.10000.\frac{4}{5} = 32000 = B$
$m-1$ $BQ = \frac{3}{4}.32000.\frac{4}{5} = 38400 = C$
2
$m-2$ $CQ = \frac{2}{3}.38400.\frac{4}{5} = 20480 = D$
3
$m-3$ $DQ = \frac{1}{4}.20480.\frac{4}{5} = 4096 = E$
4
$m-4$ $EQ = 0.4096.\frac{4}{5} = 0 = F$
5

10000 = A
32000 = B
38400 = C
20480 = D
4096 = E

104976 vierdte Dignität von 18.

Die 2. Anmerckung.

93. Ihr werdet vielleicht meynen / daß man mit leichter Mühe durch das gewöhnliche multipliciren die gegebenen Zahlen zu der verlangten Dignität erheben kan / und dannenhero die gefundene allgemeine Regel für unnütze halten. Allein ihr sollet zu seiner Zeit erfahren / wie sehr ihr euch in eurer Meynung betrogen / wenn ihr ihren vielfältigen Nutzen verspühren werdet. Jetzt erinnere ich nur dieses. Wenn ihr aus einer gegebenen Zahl eine verlangte Wurtzel ausziehen sollet; so khnnet ihr die Regeln / nach welchen solches geschiehet / wie für die Qvadrat- und Cubic-Wurtzel (80. 88) finden / wenn ihr durch die gefundene allgemeine Regel die Binomische Wurtzel $a+b$

zu der gehörigen Dignität erhebet. Z. E. Ihr sollet die Wurtzel der fünften Dignität aus einer gegebenen Zahl ziehen: so dörffet ihr nur $a+b$ zu der fünfften Dignität erheben. Das allgemeine Exempel wird euch die Regel bald an die Hand geben.

Die 3. Anmerckung.

94. Gleichwie ihr aber schon oben gesehen habet / daß die Regeln für die Binomische Wurtzeln auch dienen eine Polynomische Wurtzel zu der anderen und dritten Dignität zu erheben (§. 81. 89); also gehet es auch an / daß ihr nach dieser allgemeinen Regel / die zwar eigentlich auch nur auf Binomische Wurtzeln gerichtet ist / auf eine gleiche Weise eine iede Polynomische Wurtzel zu der verlangten Dignität erhebet; wie aus folgender Aufgabe zu ersehen.

Die 28. Aufgabe.

95. **Eine allgemeine Regel zu finden aus allen Dignitäten eine verlangte Binomische Wurtzel zu ziehen.**

Auflösung.

Weil $\sqrt[n]{x^m} = x^{m:n}$ (§. 42), so ist das Wurtzel-Ausziehen so viel als eine Grösse zu einer Dignität erheben, die zu ihrem Exponenten eine gebrochene Zahl hat. Derowegen wenn ihr in der vorhin gefundenen Regel an stat des Exponenten m den Exponenten $m:n$ setzet, so bekommet ihr eine allgemeine Regel, nach welcher so wohl jede Grösse zu einer verlangten Dignität erhoben, als aus derselben eine verlangte Wurtzel gezogen werden kan. Es ist aber folgende:

$\sqrt[n]{}$

$$\overset{n}{V}{}_{\cdot}(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{m:n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \frac{m-4n}{5n}EQ + \frac{m-5n}{6n}FQ \text{ u. s. w. unendlich fort.}$$

Die 1. Anmerckung.

96. Diese sehr nützliche Regel hat der vortrefliche Geometra in Engelland *Isaac Newton* zuerst gefunden/ wiewohl auf eine andere Art / als ich gewiesen habe: wie solches aus dem Briefe erhellet/ den er An. 1676. an den unvergleichlichen Mathematicum und Polyhistorem, den Herrn Reichs-Hoff-Rath von Leibnitz/ geschrieben und Wallisius mit in den dritten Theil seiner mathematischen Wercke f. 622. drucken lassen. Es ist aber diese Regel einerley mit der vorigen. Denn wie ihr $m:n$ durch gantze Zahlen in dem Gebrauche derselben erklären könnet/ wenn ihr $n = 1$ setzet; so könnet ihr auch in der vorigen Regel m durch einen Bruch erklären/ wenn eine Wurtzel ausgezogen werden sol/ z. E. Ihr setzet $m = \frac{1}{2}$/ weun ihr die Qvadrat-Wurtzel verlanget; $m = \frac{1}{3}$/ wenn ihr die Cubic-Wurtzel suchet u. s. w.

Die 2. Anmerckung.

97. Damit ihr ihr aber den Gebrauch der Regel deutlich erkennen möget; so will ich selbige mit einem Exempel erläutern. Ihr verlanget zu wissen die Qvadrat Wurtzel aus $aa-x^2$: so ist $m = 1, n = 2, P = a^2, Q = -x^2 : a^2$/ folgends:

$P^{m:n} = a = A$

$+\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2}a, - x^2 : a^2 = -\frac{x^2}{2a} = B$

$+\frac{m-n}{2n} BQ = \frac{1-2}{4} \cdot x^2 \cdot x^2 = -\frac{x^4}{8a^3} = C$

$+\frac{m-2n}{3n} CQ = \frac{1-4}{6} \cdot \frac{x^4}{8a^3} \cdot x^2 = -\frac{x^6}{16a^5} = D$

$+\frac{m-3n}{4n} DQ = \frac{1-6}{8} \cdot \frac{x^6}{16a^5} \cdot x^2 = -\frac{5x^8}{128a^7} = E$

$+\frac{m-4n}{5n} EQ = \frac{1-8}{10} \cdot \frac{5x^8}{128a^7} \cdot x^2 = -\frac{7x^{10}}{256a^9}$ &c.

Demnach ist $V(a^2 - x^2) = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3}$

$- \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9}$ u. s. w. unendlich fort.

Die 3. Anmerckung.

98. Wenn man aus der gegebenen Grösse eine vollkommene Wurtzel haben kan/ so ist die Zahl der Glieder allezeit endlich. Hingegen wo dergleichen nicht vorhanden/ so gehen die Glieder unendlich fort. Man nimmet aber von denselben so viele in jedem Falle als nöthig ist / biß nemlich durch Weglassung der übrigen kein merklicher Fehler entstehet.

Die 4. Anmerckung.

99. Wenn einem die 27. und 28. Aufgabe zu schweer vorkommen solte/ der kan sie so lange bey Seite setzen / biß wir unten ihrer nöthig haben werden.

Die

Die 29. Aufgabe.

100. Die Differenz zweyer Quadrate zu finden, derer Wurzeln um 1 unterschieden sind.

Auflösung.

Es sey die eine Wurzel n, die andere $n+1$ so ist das Quadrat der grossen n^2+2n+1
der kleinen n^2.

die Differenz $2n+1$.

Wenn nun jede Zahl zweymahl genommen eine gerade Zahl bringet und eine gerade Zahl von einer ungeraden um 1 unterschieden ist; so ist die Differenz zweyer Quadrate, derer Wurzeln um 1 unterschieden sind, eine ungerade Zahl, die der Summe der Wurzeln gleich ist. Es seyn die Wurzeln 8 und 9, so ist die Differenz ihrer Quadrate $17=8+9$.

Der 1. Zusatz.

101. Also kan man durch blosse Addition die Quadrat-Zahlen aller Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung finden. Man darf nemlich nur zu dem vorhergehenden Quadrate beständig seine und zugleich die folgende Wurzel addiren.

Der 2. Zusatz.

102. Die Quadrat-Zahlen werden auch

in

in ihrer Ordnung nach einander gefunden, wenn man die ungeraden Zahlen in ihrer Ordnung zu einander addiret.

Wurzeln.	ungerade Zahlen.	Quad. Zahl.
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	7	16
5	9	25
6	11	36
7	13	49
8	15	64
9	17	81
10	19	100

Die 30. Aufgabe.

103. Den Unterscheid zweyer Cubic-Zahlen zu finden, deren Wurtzeln um 1 von einander unterschieden sind.

Auflösung.

Es sey die eine Wurtzel $= n$, die andere $n+1$

so ist

die grosse Cubic-Zahl n^3+3n^2+3n+1

die kleine „ n^3

der Unterscheid $3n^2+3n+1$

Das

Das ist, $n^2 + 2n + 1 + 2n^2 + n = (n+1)^2 + 2n^2 + n$. Also ist der verlangte Unterscheid die Summe aus dem Quadrate der grossen Wurtzel und dem Quadrate der kleinen zweymahl genommen, und der kleinen Wurtzel. Z. E. Es seyn die Wurtzeln 8 und 9; so ist der Unterscheid ihrer Cubic-Zahlen $217 = 81 + 128 + 8 = 9^2 + 2 \cdot 8^2 + 8$.

Setzet ferner die dritte Wurtzel $n+2$ so ist die Cubic-Zahl

$$n^3 + 6n^2 + 12n + 8$$

Die vorige $n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

Der Unterscheid $3n^2 + 9n + 7$
Der erste Unterscheid $3n^2 + 3n + 1$

Der andere Unterscheid. $6n + 6 = 6(n+1)$

Also ist der andere Unterscheid zweyer Cubic-Zahlen die Wurtzel der kleineren 6 mahl genommen.

Zusatz.

104. Wenn man also die Quadrat-Zahlen in ihrer Ordnung nach einander gefunden (§. 101. 102; so kan man daraus die Cubic-Zahlen durch blosse Addition finden aus dem ersten Unterscheide. Oder wenn man die Cubic-Zahlen ohne die Quadrat-Zahlen finden wil; so addiret man erstlich den anderen Unterscheid 1. 6. 12. 18. 24. 30 ꝛc. um den ersten zu finden und darnach den ersten Unter-

scheid um die Cubic-Zahlen zu erhalten, wie aus beygesetztem Täffelein abzunehmen.

Wurtzeln-	ander-Unterf.	erster Untersch.	Cub. Zahlen.
1	1	1	1
2	6	7	8
3	12	19	27
4	18	37	64
5	24	61	125
6	30	91	216
7	36	127	343
8	42	169	512
9	48	217	729
10	54	271	1000

Die 31. Aufgabe.

105. **Zu finden, was für eine Zahl heraus kommet, wenn man eine gerade Zahl zu einer ungeraden addiret, oder sie von einander abziehet, oder auch durch einander multipliciret.**

Auflösung.

Weil eine gerade Zahl sich in zwey gleiche Theile theilen lässet, eine ungerade aber um 1 von einer geraden unterschieden ist; so nennet die gerade Zahl $2x$, die ungerade $2y+1$

$2y+1$	$2y+1$	$2y+1$
$2x$	$2x$	$2x$
Summe $2x+2y+1$	Differ. $2y+1-2x$	Prod. $4xy+2x$

Die

Die Summe und Differentz sind ungerade Zahlen, das Product ist eine gerade Zahl. Denn dieses lässet sich halbiren, jene nicht.

Die 32. Aufgabe.

106. Zu finden, was für eine Zahl herauskommet, wenn man eine gerade Zahl zu einer geraden addiret, oder sie von einander subtrahiret, oder auch durch einander multipliciret.

Auflösung.

Es sey die eine gerade Zahl $2x$, die andere $2y$. So ist die Summe $2x+2y$, die Differentz $2x-2y$, das Product $4xy$ und also sind alle drey gerade Zahlen, denn sie lassen sich halbiren.

Die 33. Aufgabe.

107. Zu finden, was für Zahlen herauskommen, wenn ihr eine ungerade Zahl zu einer ungeraden addiret, oder sie von einander subtrahiret, oder auch durch einander multipliciret.

Auflösung.

Es sey die eine ungerade Zahl $2x+1$, die andere $2y+1$.

$2x+1$	$2x+1$
$2y+1$	$2y+1$

Summe $= 2x+2y+2$ Differ. $= 2x-2y$

$$\begin{array}{r} 2x+1 \\ 2y+1 \\ \hline +2x+1 \\ 4xy+2y \\ \hline \end{array}$$

Product $= 4xy+2x+2y+1$

Die Summe und Differentz lassen sich halbiren, sind also gerade Zahlen. Das Product lässet sich nicht halbiren: ist also eine ungerade Zahl.

Die 34. Aufgabe.

108. Zu finden, was für Zahlen heraus kommen, wenn ihr lauter gerade Zahlen, oder eine gerade Anzahl ungerader Zahlen, oder auch eine ungerade Anzahl ungerader Zahlen addiret.

Auflösung.

Es seyn die gerade Zahlen $2x$, $2y$, $2z$, $2t$ u. s. w. so ist die Summe $2x+2y+2z+2t$ u. s. w. das ist $2(x+y+z+t$ &c. also eine gerade Zahl. Derowegen die Summe von lauter geraden Zahlen ist eine gerade Zahl.

Es seyn die ungeraden Zahlen $2x+1$, $2y+1$, $2z+1$, $2t+1$ u. s. w. ihre Anzahl $2m$. So ist ihre Summe $2x+2y+2z+2t$ u. s. w. $+2m$, das ist $2(+y+z+t$ &c.) $+2m$, folgends eine gerade Zahl.

Derow-

Derowegen wenn lauter ungerade Zahlen in gerader Anzahl zusammen addiret werden, so ist die Summe eine gerade Zahl.

Es seyn die ungeraden Zahlen abermahls $2x+1$, $2y+1$, $2z+1$, $2t+1$ u. s. w. ihre Anzahl $2m+1$. So ist ihre Summe $2x+2y+2z+2t$ u. s. w. $+2m+1$, das ist, $2(x+y+z+t$ &c.$)+2m+1$, folgends eine ungerade Zahl. Derowegen wenn lauter ungerade Zahlen in ungerader Anzahl zusammen addiret werden, so ist die Summe eine ungerade Zahl.

Anmerckung.

109. Wenn diese Aufgaben gleich sonst keinen Nutzen hätten/ so solten sie euch doch angenehm seyn/ weil sie euch eine neue Maxime der Benennung an die Hand geben. Ihr werdet aber auch bey anderen Gelegenheiten ihren Nutzen verspüren. Z. E. wenn einer verlanget/ ihr soltet 20 in 5 ungerade Zahlen theilen; so werdet ihr bald sehen/ daß dieses unmöglich sey/ weil ungerade Zahlen in ungerader Anzahl eine ungerade Zahl bringen/ wenn sie summiret werden.

Die 35. Aufgabe.

110. Zu finden, was für eine Dignität herauskommet, wenn man eine Quadrat- oder Cubic-Zahl durch sich selbst multipliciret.

Auflösung.

Es sey die Quadrat-Zahl x^2, die Cubic-Zahl x^3. Multipliciret jede durch sich selbst, so kommet in dem ersten Falle x^4, in dem anderen x^6. Weil der Exponente 4 sich durch 2, der Exponente 6 aber so wohl durch 2 als durch 3 sich di-

vidiren lässet; so ist x^4 ein Qvadrat, x^6 aber zugleich eine Qvadrat- und eine Cubic-Zahl. Derowegen wenn eine Qvadrat-Zahl durch sich selbst multipliciret wird, so ist das Product eine vierdte Dignität und Qvadrat-Zahl: Wenn eine Cubic-Zahl durch sich selbst multipliciret wird, so ist das Product zugleich eine Qvadrat- und auch eine Cubic-Zahl.

Anmerckung.

111. Auf diese Manier könnet ihr noch gar viel andere dergleichen Lehrsätze finden, wenn ihr dieselben nöthig habet.

Die 36. Aufgabe.

112 Zu finden, wie groß in einer arithmetischen Progreßion die Summe der beyden äußersten Glieder sey.

Auflösung.

Es sey das erste Glied a, der Unterscheid der Glieder d, so ist die Progreßion (§. 69. *Arithm.*)

$$\begin{array}{lllll} a. & a+d. & a+2d. & a+3d. & a+4d. \\ a+4d & & a+2d & & a \end{array}$$

$$2a+5d = 2a+5d = 2a+5d$$

$$\begin{array}{llll} a. & a+d. & a+2d. & a+3d. \\ a+3d & & 2 & a \end{array}$$

$$2a+4d = 2a+4d = 2a+4d$$

Lehra

Lehrsatz.

In einer arithmetischen Progreßion ist die Summe der beyden äußersten Glieder der Summe jeder zweyen Glieder gleich, die von den äußersten gleich weit abstehen, ingleichen zweymahl so groß als das mittlere, wenn die Glieder an der Zahl ungleich sind.

Z. E. 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21
12 9 6 3

24 = 24 = 24 = 24

Der 1. Zusatz.

113. Derowegen bekommet ihr die Summe der gantzen Progreßion, wenn ihr die Summē des ersten und letzten Gliedes durch die halbe Zahl der Glieder multipliciret. Es sey das erste Glied a, die Differentz d, die Zahl der Glieder n, so ist das letzte Glied $a + (n-1)d$, folgends die Summe der Progreßion $(2a + (n-1)d)\frac{1}{2}n = an + (n^2 - n)\frac{1}{2}d$. Es sey Z. E. $a = 3$, $n = 7$, $d = 3$, so ist die Summe der Progreßion $21 + (49 - 7)\frac{3}{2} = 21 + 42 \cdot \frac{3}{2} = 21 + 21 \cdot 3 = 21 + 63 = 84$.

Der 2. Zusatz.

114. Ihr könnet demnach die Summe einer arithmetischen Progreßion finden, wenn

euch das erste Glied, der Unterscheid und die Zahl der Glieder gegeben sind.

Der 3. Zusatz.

115. Es sey $a = 1$, $d = 2$, die Zahl der Glieder $= n$; so ist die Summe der Progression $n + n^2 - n = n^2$: woraus von neuem erhellet, daß die Quadrat-Zahlen herauskommen, wenn man die ungeraden Zahlen, das ist, die Glieder in der arithmetischen Progression 1. 3. 5. 7. 9. 11. u. s. w. zusammen addiret.

Der 4 Zusatz.

116. Es sey $a = \frac{1}{2}d$, das ist, das erste Glied sey dem halben Unterscheide der Glieder gleich; so ist die Summe der Progression $an + an^2 - an = an^2$.

Der 5. Zusatz.

117. Es sey $a = n = \frac{1}{2}d$, das ist, das erste Gliede, die Zahl und der halbe Unterschied der Glieder sind einander gleich; so ist die Summe $n^2 + n^3 - n^2 = n^3$, daß ist, der Cubus von dem ersten Gliede. Z. E. $a = n = \frac{1}{2}d = 8$, oder die Progression 8. 24. 40. 56. 72. 88. 104. 120.; so ist die Summe 512. das ist die Cubic-Zahl von 8.

Anmerckung.

118. Hieraus erhellet, wie man aus allgemeinen Lehrsätzen besondere finden kan.

Die

Die 37. Aufgabe.

119. Aus dem ersten und letzten Gliede einer arithmetischen Progreßion und dem Unterscheide der Glieder, ihre Zahl und die Summe der Progreßion zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$ die Zahl der Glieder $= x$

das letzte $= b$ die Summe $= y$

der Unterscheid $= d$

So ist (§. 113)

$b = a + dx - d$

$b - a + d = dx$

$\frac{b - a + d}{d} = x$

$\frac{b - a + 1}{d} = x$

$y = \frac{1}{2}(b + a)x$

$= \frac{(b + a)(b - a) + \frac{1}{2}(b + a)}{2d}$

$= \frac{b^2 - a^2 + b + a}{2d}$

$= \frac{b^2 - a^2 + b + a}{2}$

Es sey z. E. $a = 2$, $b = 17$, $d = 3$, so ist $x = (17 - 2) : 3 + 1 = 15 : 3 + 1 = 6$ und $y = \frac{1}{2}17 + 2) + (289 - 4) : 6 = \frac{19}{2} + \frac{285}{2} = 9\frac{1}{2} + 47\frac{1}{2} = 57$.

Probe: Denn $a + dx - d = 2 + 3 \cdot 6 - 3 = 2 + 18 - 3 = 2 + 15 = 17$ und $\frac{1}{2}(b + a)x = \frac{6}{2}(17 + 2) = 3 \cdot 19 = 57$.

Die 38. Aufgabe.

120. Aus dem ersten Gliede, dem Unterscheide der Glieder, und der Summe einer arithmetischen Progreßion die Zahl der Glieder und das letzte Glied zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied = a die Zahl der Glieder = x
der Unterscheid = d das letzte Glied = y
die Summe = c

So ist (§. 113)

$\frac{1}{2}x(a+y) = c$ $\quad a+dx-d = y.$

$ax+xy = 2c$

$xy = 2c-ax$

$y = (2c-ax) : x$ folgends

$(2c-ax) : x = a+dx-d$

$2c-ax = dx^2+ax-dx$

$2c : d = x^2+\frac{(2a-d)x}{d}$

Setzet $(2a-d) : d = m$, so ist

$2c : d = x^2+mx$

$\frac{1}{4}m^2 \quad \frac{1}{4}m^2$ (§. 83).

$\frac{1}{4}m^2+2c : d = x^2+mx+\frac{1}{4}m^2$

$\sqrt{(\frac{1}{4}m^2+2c : d)} = x+\frac{1}{2}m$

$\sqrt{(\frac{1}{4}m^2+2c : d)}-\frac{1}{2}m = x$

Oder

Oder $x = \sqrt{(4a^2 - 4ad + d^2 + 2c)} - 2a \pm d$

$4d^2 \qquad d \qquad 2d$

folgends

$y = \sqrt{(2cd + a^2 - ad + \frac{1}{4}d^2)} - \frac{1}{2}d$

$= \sqrt{(2cd + (a - \frac{1}{2}d)^2)} - \frac{1}{2}d$

Es sey $a = 2, d = 3, c = 57$, so ist $m = (4 \cdot 3) : 3 = \frac{1}{3}$, folgends $x = \sqrt{(\frac{1}{36} + 114\frac{4}{3})} - \frac{1}{6} = \sqrt{\frac{1369}{36}} - \frac{1}{6} = \frac{37}{6} - \frac{1}{6} = \frac{36}{6} = 6$. Ferner ist $y = \sqrt{(342 + \frac{1}{4})} - 1\frac{1}{2} = 18\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 17$.

Probe: Denn $(2 + 17)3 = 3 \cdot 19 = 57$ und $2 + 3 \cdot 6 - 3 = 2 + 18 - 3 = 17$.

Die 39. Aufgabe.

121. Aus dem ersten und letzten Gliede und der Summe einer arithmetischen Progreßion die Zahl und den Unterscheid der Glieder zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$ die Zahl der Glieder $= x$

das letzte $= b$ der Unterscheid $= y$

die Summe $= c$

So ist (§. 113)

$\frac{1}{2}x.(a + b) = c$ $\qquad$ $a + xy - y = b$

$x(a + b) = 2c$ $\qquad$ $xy - y = b - a$

$x = 2c : (a + b)$ $\qquad$ $xy = b + y - a$

$x = (b + y - a) : y$

Fol-

Folgends

$2c : (a+b) = (b+y-a) : y$

$2cy : (a+b) = b+y-a \quad | \; y$

$2cy = ab+ay-a^2+b^2+by-ab \quad | \; a+b$

$2cy-ay-by = b^2-a^2 \quad | \; 2c-a-b$

$y = (b^2-a^2) : (2c-a-b)$

Es sey $a = 2, b = 17, c = 57$, so ist $x = 114$: $(2+17) = 114 : 19 = 6$, und $y = (289-4) : (114-19) = 285 : 95 = 3$.

Probe: Denn $3(2+17) = 3.19 = 57$ und $2+3.6-3 = 2+18-3 = 17$, wie vorhin (§. 120).

Die 40. Aufgabe.

122. Aus dem Unterscheide und der Zahl der Glieder, ingleichen der Summe einer arithmetischen Progreßion, das erste und letzte Glied, und folgends alle übrigen zu finden.

Auflösung.

Es sey die Zahl der Glieder $= n$ das erste Glied $= x$

der Unterscheid $= d$ das letzte $= y$

die Summe $= c$

So ist (§. 113)

$\frac{1}{2}n$

$\frac{1}{2}n(x+y) = c$ $\quad y = x+nd-d$

$n(x+y) = 2c$

$x+y = 2c:n$

$y = 2c:n-x$ Folgends

$2c:n-x = x+nd-d$

$2c:n+d-nd = 2x$

$c:n+\frac{1}{2}(d-nd) = x$

Es sey $n = 6$, $d = 3$, $c = 57$, so ist $x = \frac{57}{6} + \frac{3}{2} - \frac{18}{6} = \frac{57+9}{6} \cdot 9 = \frac{66}{6} \cdot 9 = 11 - 9 = 2$ und $y = \frac{114}{6} - 2 = 19 - 2 = 17$.

Die Probe ist wie vorhin (§. 120).

Die 41. Aufgabe.

123. Aus dem Unterscheide der Glieder, dem lezten Gliede und der Summe einer arithmetischen Progreßion das erste Glied und die Zahl der Glieder zu finden.

Auflösung.

Es sey das lezte Glied $= b$ das erste Glied $= x$

der Unterscheid $= d$ die Zahl der Glieder $= y$

die Summe $= c$

So ist (§. 113)

$\frac{1}{2}y(x+b) = c$ | $b = x + dy - d$

$y(x+b) = 2c$ | $b + d - dy = x$

$x + b = 2c : y$

$x = \frac{2c}{y} - b$ Folgende

$\frac{2c}{y} - b = b + d - dy$

$2c - by = by + dy - dy^2$

$dy^2 - 2by - dy = -2c$

$y^2 - \frac{(2b+d)}{d}y = -2c : d$

Setzet $(2b+d) : d = m$, so ist

$y^2 - my = -2c : d$

$\frac{1}{4}m^2 \qquad \frac{1}{4}m^2$ (§. 83)

$y^2 - my + \frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2 - 2c : d$

$\frac{1}{2}m - y$ oder $y - \frac{1}{2}m = \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - 2c : d)}$

$y = \frac{1}{2}m \pm \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - 2c : d)}$

x oder $y = \frac{2b+d}{d} \pm \sqrt{\left(\frac{4b^2 + 4bd + d^2}{4d^2} - \frac{2c}{d}\right)}$

$= \frac{2b+d}{2d} + \sqrt{4b^2 + 4bd + d^2 - 8cd)}$

folgends

$$x = b + d - b - \tfrac{1}{2}d \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(4b^2 + 4bd + d^2 - 8cd)}$$
$$= \tfrac{1}{2}d \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(4b^2 + 4bd + d^2 - 8cd)}$$

Es ist aber $4b^2 + 4bd + d^2 = (2b + d)^2$.

Es sey $b = 17$, $d = 3$, $c = 57$, so ist $2b + d = 34 + 3 = 37$, folgends

$$y = \frac{37 - \sqrt{(1369 - 1368)}}{6} = \frac{37 - 1}{6} = \frac{36}{6} =$$

6 und $x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Die Probe ist wie vorhin (§. 120).

Die 42. Aufgabe.

124. Aus der Summe einer arithmetischen Progreßion, der Zahl der Glieder und dem Producte aus dem ersten Gliede in das letzte, die Glieder zu finden.

Auflösung.

Es sey das Product $= a$. das erste Glied $= x$
die Zahl der Glieder $= n$ das letzte $= y$
die Summe $= c$

Soist

$\frac{1}{2}n(x + y) = c$ (§. 113) $\quad a = xy$

2 $\quad x$

$n(x + y) = 2c$ $\quad a : x = y$

n

$x + y = 2c : n$

$y = \frac{2c}{n} - x$

folgends

folgends

$$a : x = 2c : n - x$$

$$a = 2c\,x - x^2$$

$$x^2 - 2c\,x = -a$$

$$c^2 : n^2 \qquad c^2 : n^2$$

$$x^2 - 2c\,x + c^2 : n^2 = c^2 : n^2 - a$$

$$\frac{c}{n} - x = \sqrt{(c^2 - a)}$$

$$\frac{c}{n} - \sqrt{(c^2 - a)} = x$$

Nemlich wenn man das Zeichen — braucht, so bekommet man x; wenn man das Zeichen + brauchet, bekommet man y.

Es sey $c = 57$, $n = 6$, $a = 34$, so ist $x = \frac{57}{6} - \sqrt{\frac{(3249 - 34)}{36}} = \frac{57}{6} - \sqrt{\frac{(3249 - 1224)}{36}} =$

$\frac{57}{6} - \sqrt{\frac{2025}{26}} = \frac{57}{6} - \frac{45}{6} = \frac{12}{6} = 2$, und hingegen $y = \frac{57}{6} + \frac{45}{6} = \frac{102}{6} = 17$.

Pro-

Probe: Denn $\frac{5}{2}(2+17) = 3.19. = 57$ und $2.17 = 34$.

Die 8. Erklärung.

125. Wenn man etliche Glieder von einer arithmetischen Progreßion, die sich von 1 anfänget, zu einander adiret; so heisset die Summe eine Polygonal-Zahl (*Numerus Polygonus*).

Die 9. Erklärung.

126. Insbesondere heisset es eine Triangular-Zahl, wenn die Differentz der Glieder in der Progreßion 1 ist; eine Qvadrat-Zahl, wenn sie 2 ist; eine Pentagonal-Zahl, wenn sie 3 ist: eine Hexagonal-Zahl, wenn sie 4 ist u. s. w.

Arithm Progr.	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8
Triang. Zahlen	1. 3. 6 10. 15. 21. 28 36
Arithm. Progr.	1. 3 5. 7. 9. 11. 13 15
Qvadr. Zahlen	1. 4. 9 16. 25. 36. 49 64
Arithm. Progr.	1. 4. 7. 10 13. 16. 19. 22
Pentagonal-Zahl	1. 5. 12. 22. 35. 51. 70. 92
Arithm. Progr.	1. 5. 9. 13. 17. 21. 25. 29
Hexagonal-Zahl	1. 6. 15. 28. 45. 66. 91. 120

Anmerckung.

127. Ihr werdet inskünftige erfahren / daß es nicht ohne Nutzen sey / wenn man allerhand Progreßionen der Zahlen summiren lernet. Zu dem Ende wollen wir auch untersuchen / wie man die Polygonal-Zahlen summiren kan.

Die 10. Erklärung.

128. Die Seite der Polygonal-Zahl heisset die Zahl der Glieder, welche von der Progreßion summiret worden, damit dieselbe entstanden.

Anmerckung.

129. Die Polygonal-Zahlen haben ihren Nahmen von den regulären Figuren / darein sich die Einheiten / daraus sie bestehen / versetzen lassen. Es kommen aber in die Seite der Figur jederzeit so viel Einheiten oder Puncte (wodurch sie angedeutet werden) als Glieder von der Progreßion summiret worden / damit man die Polygonal-Zahl bekomme.

Die 11. Erklärung.

130. Durch die Zahl der Winckel verstehen wir diejenige / welche andeutet, wie viel winckel die Figur hat, von der die Polygonal-Zahl ihren Nahmen bekommet.

Der 1. Zusatz.

131. Also ist die Zahl der Winckel in Trigonal-Zahlen 3; in Quadrat- oder Tetragonal-Zahlen 4; in Pentagonal-Zahlen 5 u. s. w.

Der 2. Zusatz.

132. Da nun in Trigonal-Zahlen der Unterscheid der Glieder 1, in Quadrat-Zahlen 2, in Pentagonal-Zahlen 3 u. s. w. ist; so ist die Zahl der Winckel jederzeit um 2 grösser als der Unterscheid der Glieder in der Progreßion, durch deren Summirung die Polygonal-Zahlen entstehen.

Die

Die 43. Aufgabe.

133. Aus der gegebenen Seite einer Polygonal-Zahl und der Zahl der Winckel die Polygonal-Zahl zu finden.

Auflösung.

Es sey die Seitte = a
Die Zahl der Winckel = n
das erste Glied der Progr. ist = 1 (§. 125)
der Unterscheid der Glieder = $n-2$ (§. 132)
da letzte Glied $1+(n-2)(a-1)$ (§. 113) = $an-2a-n+3$
das erste Gliede

Summe des ersten und letzten	$an-2a-n+4$
halbe Zahl der Glieder	$\frac{1}{2}a$ (§. 128).

Polygonal-Zahl $\frac{1}{2}a^2n-a^2-\frac{1}{2}an+2a$ (§. 113) =
$a^2n-2a^2-an+4a$ = $(n-2)a^2-a(n-4)$.
2 2

Es sey $n=3$, so ist die Trigonal-Zahl =
$1a^2+1a$,
2

Es sey $n=4$, so ist die Tetragonal-Zahl =
$2a^2-0a=a^2$.
2

Es sey $n=5$, so ist die Pentagonal-Zahl =
$3a^2-1a$.
2

Es sey $n = 6$, so ist die Hexagonal-Zahl $= \frac{4a^2 - 2a}{2} = 2a^2 - a$.

Es sey $n = 7$, so ist die Heptagonal-Zahl $= \frac{5a^2 - 3a}{2}$.

Es sey $n = 8$, so ist die Octogonal-Zahl $= \frac{6a^2 - 4a}{2} = 3a^2 - 2a$ u. s. w. unendlich fort.

Nemlich die um zwey verminderte Zahl der Winckel wird durch das Quadrat der Seite, und die um 4 verminderte Zahl der Winckel durch die Seite der Polygonal-Zahl multipliciret; das letzte Product aber von dem ersten abgezogen und der Rest durch zwey dividiret.

Exempel.

Ihr sollet die sechste Trigonal-Zahl finden. Weil $a = 6$; so ist $\frac{a^2 + a}{2} = \frac{36 + 6}{2} = 18 + 3 = 21$. Wenn ihr die achte Pentagonal-Zahl suchet; so ist $a = 8$, und also $\frac{3a^2 - a}{2} = \frac{3.64 - 8}{2} = 3 \cdot 32 - 4 = 96 - 4 = 92$. Wenn ihr die fünfte Hexagonal-Zahl suchet, so ist $a = 5$, und also $2a^2 - a = 50 - 5 = 45$.

Die

Die 44. Aufgabe.

134. Aus der gegebenen Polygonal-Zahl und der Zahl der Winckel die Seite zu finden.

Auflösung.

Es sey die Polygonal-Zahl $= p$ die Seite
die Zahl der Winckel $= n$ $= x$
So ist der Unterscheid der Glieder $n-2$ (§. 132)
das erste Glied 1 (§. 125)
Derowegen das letzte $1+(x-1)(n-2)$ (§. 113. 128)

das ist $3+nx-2x-n$
das erste Gliede 1

Summe des ersten und letzten $4+nx-2x-n$
halbe Zahl der Glieder $\frac{1}{2}x$ (§. 128)

$2x+\frac{1}{2}nx^2-x^2-\frac{1}{2}nx$

Derowegen ist

$$\frac{\frac{1}{2}nx^2-x^2+2x-\frac{1}{2}nx = p}{2}$$

$$nx^2-2x^2-nx+4x = 2p$$

$$\frac{x^2-n+4}{n-2}\,x = \frac{2p}{n-2}$$

Das ist, wenn $(n-4).(n-2) = m$

$$x^2 - mx = 2p : (n-2)$$
$$\tfrac{1}{4}m^2 \qquad \tfrac{1}{4}m^2$$

$$x^2 - mx + \tfrac{1}{4}m^2 = \tfrac{1}{4}m^2 + 2p : (n-2)$$

$$x - \tfrac{1}{2}m = \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + 2p : (n-2))}$$

$$x = \tfrac{1}{2}m + \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + 2p : (n-2))}$$

Das ist, wenn man vor m seinen Werth setzet,

$$x = \frac{n-4}{2n-4} + \sqrt{\left\{\frac{n^2 - 8n + 16}{4n^2 - 16n + 16} + \frac{4p}{2n-4}\right\}} =$$

$$\frac{n-4 + \sqrt{(8p(n-2) + (n-4)^2}}{2n-4}$$

Es sey $n = 3$; so ist $x = \frac{-1 + \sqrt{(8p+1)}}{2}$

Es sey $n = 4$; so ist $x = \frac{0 + \sqrt{(16p+0)}}{4}$

Es sey $n = 5$; so ist $x = \frac{1 + \sqrt{(24p+1)}}{6}$

Es sey $n = 6$; so ist $x = \frac{2 + \sqrt{(32p+4)}}{8}$

Es sey $n = 7$; so ist $x = \frac{3 + \sqrt{(40p+9)}}{10}$

Es sey $n = 8$; so ist $x = \frac{4 + \sqrt{(48p+16)}}{12}$

u. s. w. unendlich fort.

Wenn

Wenn ihr diese Polygonal-Zahlen betrachtet, so werdet ihr wahrnehmen, 1. daß überall die Zahl auſſer dem Wurtzel-Zeichen, die um 4 vergeringerte Zahl der Winckel; und 2. daß die andere Zahl unter dem Wurtzel Zeichen das Qvadrat von dieser Zahl sey; 3. die erste aber dem Producte aus der Polygonal-Zahl in den Divisorem 4 mahl genommen gleiche und 4. der Divisor die Summe der Zahl auſſer dem Wurtzel-Zeichen und der Zahl der Winckel ausmache.

Es sey 21 eine Trigonal-Zahl: ihr sollet die Seite finden, das ist, die wie vieleste sie in ihrer Ordnung ist. Weil $p = 21$, so ist die verlangte Seite $= \frac{-1 + \sqrt{(168+1)}}{2} =$

$\frac{-1+\sqrt{169}}{2} = \frac{-1+13}{2} = \frac{12}{2} = 6.$ Es sey

$p = 45$ und zwar eine Hexagonal-Zahl; so ist die verlangte Seite $\frac{2+\sqrt{(32.45+4)}}{8}$

$= \frac{2+\sqrt{1444}}{8} = \frac{2+38}{8} = \frac{40}{8} = 5.$

Zusatz.

135. Wenn ihr also nach und nach eine gegebene Zahl in die Stelle von p setzet; so werdet ihr sehen, ob sie mit unter die Polygonal-Zahlen gehöre, und in welche Reihe derselben

sie zu setzen sey. Denn sie findet in allen Reihen stat, wo für ihre Seite eine ganze Rational-Zahl heraus kommet. Also wenn euch 21 wäre gegeben worden, würdet ihr gefunden haben, daß es die sechste Trigonal-Zahl sey.

Anmerckung.

136. Ihr dörffet aber nicht weiter versuchen / ob die gegebene Zahl sich für p setzen lasse / wenn ihr die Zahl der Winckel gleich wird / als in dem gegebenen Exempel 21.

Die 45 Aufgabe.

137. Die Grösse des Products der beyden äussersten Glieder in einer geometrischen Proportion zu determiniren.

Auflösung.

Es sey in dem ersten Falle, wenn nur 3 Glieder sind, das erste $= a$, der Exponente $= m$, so ist die Proportion

$$\div\div a. \quad ma. \quad m^2a \quad (\S. 66. 68. \textit{Arithm.})$$

$$\frac{ma}{\cdot\cdot} \quad \frac{a}{\cdot\cdot}$$

$$(ma)^2 = m^2a^2 \quad (\S. 88. \textit{Arithm.})$$

Es sey in dem anderen Falle, wenn 4 Glieder sind, das erste $= a$, der Exponente $= m$, das dritte $= b$, so ist die Proportion

$$a : ma = b : mb \quad (\S. 66. \textit{Arithm.})$$

$$\frac{b}{\cdot\cdot} \quad \frac{a}{\cdot\cdot}$$

$$mab \quad mab$$

Lehr-

Lehrsatz.

Wenn drey Grössen einander geometrisch proportional sind, so ist das Product der beyden äussersten dem Quadrate der mittleren gleich: sind aber vier einander proportional, so ist das Product der äussersten dem Producte der beyden mittleren gleich.

Anmerckung.

138. Von den Zahlen ist dieses schon in der Rechen-Kunst erwiesen worden (§. 109. 110. *Arithm.*). Wir haben aber in der Geometrie solches mit Recht auch auf die Linien/ Flächen und Cörper gedeutet/ indem man alle Grössen als undeterminirte Zahlen ansehen kan (§. 9); welches nun durch gegenwärtige algebraische Rechnung noch mehr gerechtfertiget wird.

Die 46. Aufgabe.

139. Drey Geometrisch-Proportional-Grössen zu finden, aus dem gegebenen Producte des Quadrates der dritten in die erste und dem Exponenten.

Auflösung.

Es sey das Product $= a$ die erste Grösse $= x$

der Exponente $= m$ so ist die andere $= mx$

die dritte $= m^2x$

Folgends $a = m^4x^3$

$a : m^4 = x^3$

$\sqrt[3]{(a : m^4)} = x$

Es sey $a = 648$, $m = 3$, so ist $x = \sqrt[3]{(648 : 81)} = \sqrt[3]{8} = 2$, folgends $mx = 6$, $m^2x = 18$.

Probe: Denn $2.18 = 6.6 = 36$ (§. 137).

Die 47. Aufgabe.

140. Aus der gegebenen Summe des ersten und vierdten Gliedes in einer geometrischen Proportion, ingleichen der Summe des anderen und drittens, und dem Exponenten, jedes Glied insbesondere zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste Summe $= a$ das erste Glied $= x$

die andere $= b$ so ist das II $= mx$

der Exponente $= m$ das III $= b - mx$

das IV $= a - x$

Folgends

$$x : mx = b - mx : a - x$$

daher $ax - x^2 = mbx - m^2x^2$ (§. 137)

$$a - x = mb - m^2x$$

$$m^2x - x = mb - a$$

$m^2 - 1$ *div.*

$$x = (mb - a) : (m^2 - 1)$$

Es sey $a = 13$, $b = 11$, $m = 2$, so ist $x = \frac{22 - 13}{4 - 1} = \frac{9}{3} = 3$ und $mx = 6$, folgends

sind

sind die vier Proportional-Zahlen 3 : 6 = 5 : 10.

Probe: Denn 3.10 = 5.6 = 30 (§. 137).

Die 48. Aufgabe.

141. Aus der gegebenen Summe des ersten und letzten Gliedes und dem Exponenten in einer geometrischen Proportion von 3 Gliedern, die Glieder selbst zu finden.

Auflösung.

Es sey die Summe = a das erste Glied = x
der Exponente = m das andere = mx
das dritte = m^2x

Folgendes $a = m^2x + x$ (§. 137)
$m^2 + 1$. div.
$a : (m^2 + 1) = x$

Es sey $a = 50$, $m = 2$, so ist $x = 50 : (4 + 1)$
$= 50 : 5 = 10$, $mx = 20$, $m^2x = 40$.

Probe; Denn 10. 40 = 20. 20 = 400 (§. 137).

Die 49. Aufgabe.

142. Zu finden, auf wie vielerley Art die Glieder einer geometrischen Proportion versetzet werden können, damit sie einander proportional verbleiben.

Auflösung.

Versetzet sie auf alle mögliche Weise, und vergleichet ihre Summen, Unterschiede u. s. w. mit ihnen untereinander: so wer-

der

det ihr bald sehen, in welchen Fällen eine Proportion bleibet, wenn ihr nur acht gebet, ob in beyden Verhältnissen, die mit einander verglichen werden, einerley Exponente ist (§. 65. *Arithm.*).

Es sey demnach $a : ma = b : mb$

so ist 1. (*alternatim*) $a : b = ma : mb$

2. (*inverse*) $ma : a = mb : b$

3. (*conversim*) $a + ma : a = b + mb : b$

4. (*composite*) $a + ma : ma = b + mb : mb$

5. (*divisim*) $ma - a : a = mb - b : b$

$ma - a : ma = mb - b : mb$

Ferner

6. $a^2 : m^2 a^2 = b^2 : m^2 b^2$

oder überhaupt

$a^n : m^n a^n = b^n : m^n b^n$

Ingleichen

7. $a : mac = b : mbc$

8. $a : ma = b : mb$

$\frac{\quad}{c} \quad \frac{\quad}{c}$

9. $ac : ma = bc : mb$

10. $\frac{a}{c} : ma = \frac{b}{c} : mb$

11. $ac : mac = b : mb$

12. $\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = b : mb$

13. $ac : mac = bd : mbd$

14. $\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d}$

15. $ac : mad = bc : mbd$

16. $a : ma = b : mb$

$\frac{}{c}\ \frac{}{d}\quad \frac{}{c}\ \frac{}{d}$

Es sey *ordinate* $a : ma = b : mb$

und $ma : mna = mb : mnb$

so ist 17. *ex æquo* $a : mna = b : mnb$

es sey *perturbate* $a : ma = b : mb$

und $ma : mna = \frac{b}{n} : b$

so ist 18. *ex æquo* $a : mna = \frac{b}{n} : mb$

Anmerckung.

143. Hier habet ihr ohne Mühe 18 sehr nützliche Lehrsätze gefunden / die ihr euch wohl bekandt machen müsset/ wenn ihr inskünftige entweder die mathematischen Schriften zu lesen / oder auch durch eigenes Nachsinnen mathemathische Wahrheiten herauszu bringen gedencket. Denn die geometrische Proportion ist der Seele der mathematischen Wissenschafften. Der Beweiß beruhet darauf / weil überall einerley Exponenten für eine angegebene Proportion heraus kommet / als im 3 Lehrsatze ist $a + ma = 1 + m$ und $\frac{b}{a} + \frac{mb}{b} =$

$1 + m$; im siebenden $\frac{a}{mac} = \frac{1}{mc}$ und $\frac{b}{mbc} = \frac{1}{mc}$;

im siebenzehenden $\frac{a}{mna} = \frac{1}{mn}$ und $\frac{b}{mnb} = \frac{1}{mn}$.

Ich halte es aber für unnöthig die gefundenen Lehrsätze mit Wörtern auszudrucken / weil ein jeder das für sich selbst thun kan / wenn er Lust darzu hat. Z. E. der 1 Lehrsatz lautet also: **Wenn vier Grössen proportional sind, so verhält sich auch die**

die erste zu der dritten, wie die andere zu der vierdten. Der 11. wird so gegeben: Wenn ihr in einer geometrischen Proportion das erste und andere Glied durch eine Grösse multipliciret; so bleiben auch die veränderten Grössen den vorigen proportional.

Die 50. Aufgabe.

144. Zu finden, wie zwey Grössen verändert werden können, daß doch ihre erste Verhältnis gegeneinander unverändert bleibet.

Auflösung.

Es seyn zwey Grössen a und ma, die sich gegeneinander verhalten wie 1 zu m; so ist:

I. $a : ma$
$c \quad c$

$ac : mac = a : ma = 1 : m$

II. $a : ma$
$c \quad c$

$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = a : ma = 1 : m$

III. $a : ma$
$b : mb$

$a-b : ma-mb = a : ma = b : mb = 1 : m$.

IV. $a : ma$
$b : mb$

$a+b : ma+mb = a : ma = b : mb = 1 : m$

Lehr-

Lehrsatz.

1. Wenn ihr zwey Grössen durch eine dritte multipliciret, so verhalten sich die Producte gegen einander, wie die multiplicirten Grössen. 2. Wenn ihr zwey Grössen durch eine dritte dividiret, so verhalten sich die Quotienten wie dieselben Grössen. 3. Wenn sich die weggenommenen Theile gegen einander verhalten wie die ganze Grössen, so verhalten sich auch die übrigen Theile wie die ganze Grössen. 4. Wenn die hinzu gesetzten Grössen sich verhalten wie die Grössen, zu denen sie addiret werden, so haben auch die Summen eben selbige Verhältnis.

Und dieses letztere gehet an, auch wenn vieler Proportional-Grössen Förder- und Hinter-Gliede zueinander addiret werden. Z. E. Es sey $a : mb = b : mb = c : mc = d : md = e : me$ &c. so ist $a + b + c + d + e$ &c. : $ma + mb + mc + md + me$ &c. $= a : ma = 1 : m$.

Die 51. Aufgabe.

145. Die Grösse des Productes der beyden äussersten Glieder in einer geometrischen Progreßion zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$, der Exponente oder Nahme der Verhältnis $= m$, so ist die Progreßion

$a. ma. m^2a. m^3a. m^4a. m^5a. m^6a.$

$\frac{m^5a}{m^6a^2} = \frac{m^3a \; m^2a}{m^6a^2 = m^6a^2} = \frac{a}{m^6a^2}$

Lehrsatz.

In einer geometrischen Progreßion ist das Product der beyden äußersten Glieder dem Producte zweyer von den mittleren gleich, die von den äußersten gleich weit abstehen, und dem Quadrate des mittleren, wenn sie an der Zahl ungleich sind. Und das letzte Glied in einer geometrischen Progreßion ist gleich dem Producte aus dem ersten Gliede in die Dignität des Exponenten, deren Grad um 1 weniger ist als die Zahl der Ordnung.

Die 52. Aufgabe.

146. Die Grösse des Quotienten zu determiniren, der heraus kommet, wenn der Unterscheid der beyden äußersten Glieder durch den um 1 vergeringerten Exponenten dividiret wird.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$, der Exponente $= m$, die Zahl der Glieder $= n$, so ist das letzte Glied $m^{n-1}a$, der Unterscheid des ersten und letzten $m^{n-1}a-a$. Dividiret denselben durch $m-1$, so kommet heraus $m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + m^{n-5}a + m^{n-6}a + m^{n-7}a$ u. s. w. Wenn demnach n eine

determinirte Zahl ist, z. E. 7, so ist $n - 7 = o$ und demnach $m^{n-7} = m^{o} = 1$, folgends $m^{n-7} a = a$. Solchergestalt ist der Quotient die Summe aller Glieder weniger das letzte.

$$m-1) \; m^{n-1} a - a \; \left\{ \; m^{n-2} a + m^{n-3} a + m^{n-4} a + \right.$$
$$m^{n-1} a - m^{n-2} a \; \left\{ \; m^{n-5} a + m^{n-6} a \; \&c. \right.$$

$$+ m^{n-2} a - a$$
$$+ m^{n-2} a - m^{n-3} a$$

$$+ m^{n-3} a - a$$
$$m^{n-3} a - m^{n-4} a$$

$$+ m^{n-4} a - a$$
$$m^{n-4} a - m^{n-5} a$$

$$+ m^{n-5} a - a$$
$$m^{n-5} a - m^{n-6} a$$

$$+ m^{n-6} a - a$$
$$\&c.$$

Zusatz.

147. Wenn ihr demnach den Unterscheid des ersten und letzten Gliedes in einer geometrischen Progreßion durch den um 1 vergeringerten Exponenten dividiret, und zu dem Quotienten das letzte Glied addiret; so habet ihr die Summe der gantzen Progreßion. Es sey das erste Glied a, der Exponente m, die Zahl der Glieder n, so

ist das letzte Glied $m^{n-1}a$. Und demnach die Summe der Progreßion $m^{n-1}a + (m^{n-1}a - a) : (m-1)$, das ist, wenn $m = 2$, $a = 1$, $n = 8$, $128 + 127 : 1 = 255$. Wenn ihr alles zu einer Benennung bringet, so ist die Summe $(m^n a - m^{n-1}a + m^{n-1}a - a) : (m-1) = (m^n a - a) : (m-1)$.

Die 53. Aufgabe.

148. Aus dem gegebenen ersten und letzten Gliede mit der Zahl der Glieder in einer geometrischen Progreßion den Exponenten zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$ der Exponente $= x$

das letzte $= b$

die Zahl der Glieder $= n$

So ist $b = x^{n-1}a$ (§. 145)

$b : a = x^{n-1}$

$b^{1:(n-1)} : a^{1:(n-1)} = x$

Es sey $a = 2$, $b = 486$, $n = 6$, so ist $x = \sqrt[5]{486} : \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{243} = 3$.

Probe: Denn $3^5 . 2 = 243 . 2 = 486$.

Die 54. Aufgabe.

149. Aus dem gegebenen Exponenten der

der Zahl der Glieder und der Summe der geometrischen Progreßion das erste Glied zu finden.

Auflösung.

Es sey der Exponente = m das erste Glied = x

die Zahl der Glieder = n Soll das letzte = $m^{n-1}x$ (§. 145)

die Summe = c

Folgends

$$c = (m^{n-1}x - x) : (m-1) + m^{n-1}x$$

$$mc - c = m^{n-1}x - x + m^n x - m^{n-1}x = m^n x - x$$

$$(m-1)c : (m^n - 1) = x$$

Es sey $m = 3$, $n = 6$, $c = 728$; so ist $x = 2$.

$728 : 728 = 2$.

Probe: Denn $(486 - 2) : 2 + 486 = 243$

$- 1 + 486 = 242 + 486 = 728$.

Die 55 Aufgabe.

150. Aus dem ersten und letzten Gliede und dem Exponenten die Zahl der Glieder in einer geometrischen Progreßion zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied = a die Zahl der Glieder = x

das letzte = b

der Exponente = m

So ist $m^{x-1} a = b$, das ist, wenn ihr den Logarithmum von $a = la$ und den Logarithmum von $m = lm$ setzet,

$$x\,lm - lm + la = lb \text{ (§. 23. } Trig.\text{)}$$

$$x\,lm = lb - la + lm$$

$$x = \frac{lb - la + 1}{lm}$$

Es sey $n = 2$, $b = 486$, $m = 3$, so ist

$lb = 2.6866363$

$la = 0.3010300$

$lb - la = 2.3856063$

$lb - la = 7385606\,3 \mid 5$

$lm = 8777777\,3 \mid 1$

$6 = x$

Probe: Denn $2.243 = 486$ (§. 145).

Die 56. Aufgabe.

151. Eine unendliche Zahl Brüche zu summiren, deren Zehler Eines ist, die Nenner aber in einer geometrischen Verhältnis fortgehen.

Auflösung.

Es sey der Nenner des ersten Bruches $= a$, der Exponente $= m$. Weil die Brüche unendlich abnehmen, so muß der letzte

so

so kleine werden, daß er in Ansehung des ersten für nichts zu halten. Und also ist die Differentz des ersten und letzten Gliedes dem ersten gleich, das ist, $1 : a$, folgends die Summe $1 : a + 1 : (ma - a) = (m - 1 + 1) : (ma - a) = m : (m - 1)a$.

Es sey $m = 2$, so die Summe der Brüche $= 2 : a$, folgends $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ u. s. w. unendlich fort $= 1$.

Es sey $m = 3$, so ist die Summe der unendlichen Brüche $= 3 : 2a$, folgends $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$ u. s. w. unendlich fort $= 3 : 6 = \frac{1}{2}$.

Es sey $m = 4$, so ist die Summe der unendlichen Brüche $= 4 : 3a$, folgends $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$ u. s. w. unendlich fort $= 4 : 12 = \frac{1}{3}$.

Die 57. Aufgabe.

152. Die Summe unendlicher Brüche zu finden, deren gemeiner Zehler einer gegebenen Zahl gleich ist, die Nenner aber in einer geometrischen Progreßion fortgehen.

Auflösung.

Es sey der gemeine Zehler $= b$, der Exponente der Nenner in der Progreßion $= m$, der Nenner des ersten Bruches $= a$, so ist der erste Bruch $= \frac{b}{a}$. Weil nun der letzte Bruch aus der unendlichen Progreßion in Ansehung des ersten nichts ist, so ist der Un-

terscheid dieser beyden $\frac{b}{a}$ folgends die Summe

$$\frac{b}{a} + \frac{b}{ma-a} = \frac{bm-b}{ma-a} + \frac{b}{ma-a} = \frac{bm}{(m-1)a}.$$

Es sey $m = 2$, $a = 6$, $b = 3$, so ist die Summe der Progreßion $= 6:6 = 1$, das ist, $\frac{3}{6} + \frac{3}{12} + \frac{3}{24}$ u. s. w. unendlich fort.

Eben so findet ihr, daß $\frac{5}{7} + \frac{5}{21} + \frac{5}{63}$ u. s. w. unendlich fort $= 15:14 = 1\frac{1}{14}$.

Ingleichen findet ihr, daß $\frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32}$ &c. $= \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Anmerckung.

153. Diese Aufgaben gehören in die Arithmeticam infinitorum, die *Johannes Wallisius* zuerst erfunden / und *Ismaël Bullialdus* weiter ausgeführet: ich aber in meinen Elementis Analyseos infinitorum zwar kurtz / iedoch viel allgemeiner als beyde abgehandelt. Allein weil man dieselbe nicht mehr sonderlich nöthig hat / nachdem der Herr von Leibnitz seine Differential- und Integral-Rechnung bekandt gemacht; wollen wir uns auch mit derselben nicht aufhalten.

Die 12. Erklärung.

154. Drey oder vier Grössen sind harmonisch proportional, wenn im ersten Falle der Unterscheid der ersten und anderen sich verhält zu dem Unterscheide der anderen und dritten wie die erste zu der dritten, im anderen Falle aber wie der Unterscheid der ersten und anderen zu dem Unterscheide der dritten und vierdten wie

die

die erste zu der vierdten. Dergleichen Zahlen sind 2, 3 und 6, denn 1:3 = 2:6.

Die 13. Erklärung.

155. Wenn in dem ersten Falle die Glieder vervielfältiget werden; so entstehet eine harmonische Progression.

Die 58 Aufgabe.

156. Zu zwey gegebenen Grössen die dritte harmonische Proportional-Grösse zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste = a die dritte = x
die andere = b

So ist (§. 154)

$$b - a : x - b = a : x$$

$$ax - ab = bx - ax \text{ (§. 137)}$$

$$2ax - bx = ab$$

$$2a - b$$

$$ab : (2a - b) = x.$$

Es sey $a = 10$, $b = 16$; so ist $x = 160 : (20 - 16) = 160 : 4 = 40$.

Probe: Denn $16 - 10 : 40 - 16 = 6 : 24 = 10 : 40 = 1 : 4$.

Der 1. Zusatz.

157. Wenn $2a = b$; so ist $x = ab : 0$, und also $1 : 0 = x : ab$, folgends kan keine harmonische Proportional-Grösse gefunden

werden: welches vielweniger angehet, wenn b grösser als $2a$.

Der 2. Zusatz.

158. Wenn man die dritte Grösse für die andere nimmet; so kan man auf gleiche Weise die vierdte finden, und so weiter fort. Die Glieder einer harmonischen Progreßion

$$a, b, \frac{ab}{2a-b}, \frac{ab}{3a-2b}, \frac{ab}{4a-3b}, \frac{ab}{5a-4b},$$

$$\frac{ab}{6a-5b}, \frac{ab}{7a-6b} \text{ &c.}$$

Die 59. Aufgabe.

159. Zwischen zwey gegebenen Grössen die mittlere harmonische Prnportional-Grösse zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste $= a$, die andere $= x$,
die dritte $= b$,

So ist (§. 154),

$$x-a : b-x = a : b,$$

$$bx - ab = ab - ax \text{ (§. 137)},$$

$$bx + ax = 2ab,$$

$$x = 2ab : (a+b),$$

Es sey $a = 10$, $b = 40$; so ist $x = 800 : 50 = 16$.

Pro-

Probe: Denn 16 — 10 : 40 — 16 = 6 : 24 = 10 : 40 = 1 : 4, wie vorhin (§. 156).

Die 60. Aufgabe.

160. Zu drey gegebenen Grössen die vierdte harmonische Proportional-Grösse zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste = a die vierdte = x
die andere = b
die drite = c

So ist (§. 154)

$$b - a : x - c = a : x$$

$$bx - ax = ax - ac \quad (§. 137)$$

$$ac = 2ax - bx$$

$$ac : (2a - b) = x$$

Es sey $a = 6$, $b = 8$, $c = 12$; so ist $x = 72 : (12 - 8) = 72 : 4 = 18$.

Probe: Denn 8 — 6 : 18 — 12 = 2 : 6 = 6 : 18 = 1 : 3 (§. 154).

Anmerckung.

161. Nachdem wir den Nutzen der Algebra in arithmetischen Exempeln gezeiget; so ist es Zeit, daß wir zu geometrischen Aufgaben schreiten.

Die 61. Aufgabe.

162. Aus dem gegegebenen Radio des Circuls ED die Seite des in ihm bey

Illii 5, schrie-

schriebenen regulären Drey-Eckes AB zu finden.

Auflösung.

Es sey DB die Seite des Sechs-Eckes. Weil DB = BE (§. 115. *Geom.*) und bey E rechte Winckel sind (§. 125 *Geom.*); so ist auch DF = EF (§. 90. *Geom.*). Es sey demnach

DB = a BA = x.
So ist DF = $\frac{1}{2}a$ BF = $\frac{1}{2}x$.
folgends $\frac{3}{4}aa = \frac{1}{4}xx$ (§. 172. *Geom.*)

$$3aa = xx$$

$$\sqrt{3aa} = x.$$

Tab. I. Fig. 2.

Ihr findet demnach x, wenn ihr zwischen $3a$ und a die mittlere Proportional-Linie suchet (§. 210. *Geom.*). Besser aber geschiehet es also: Aus A und B machet mit dem Diameter AB einen Durchschnitt in D und ziehet aus dem Mittelpuncte C die Linie CD. Diese ist die Seite bey Dreyeckes. Denn da $DB^2 = 4a^2$ und $CB^2 = a^2$, so ist $DC^2 = 3aa$ (§. 172. *Geom.*) folgends $DC = \sqrt{3aa}$. Oder machet AE = a; so ist wegen des rechten Winckels bey E (§. 115. *Geom.*) $EB = \sqrt{3aa}$ (§. 172. *Geom.*).

Der 1. Zusatz.

163. Weil $3aa = xx$, so ist $aa : xx = 1 : 3$, das ist, $DE^2 : AB^2 = 1 : 3$.

Tab. I. Fig. 1.

Der

Der 2. Zusatz.

164. Wenn die Seite des Drey-Eckes b gegeben ist, und ihr soltet den Radium des Circuls y finden, welcher um selbiges beschrieben werden kan; so habet ihr $3y^2 = b^2$ und also ist $y = V\frac{1}{3}b^2$, folgends dörffet ihr nur zwischen der Linie AB (b) und dem dritten Theile derselben ($\frac{1}{3}b$) die mittlere Proportional-Linie suchen (§. 210. *Geom.*). Tab. I. Fig. I.

Der 3. Zusatz.

165. Die halbe Seite AB, nemlich BF, ist der Sinus des Bogens BD von 60° (§. 2. *Trigon.*). Derowegen könnet ihr durch gegenwärtige Aufgabe den Sinum von 60° finden (§. 11. *Trigon.* 112. *Ar.*).

Die 62. Aufgabe.

166. Aus dem gegebenen Radio des Circuls AC die Seite des in ihm beschriebenen regulären Acht-Eckes zu finden. Tab. I. Fig. 3.

Auflösung.

Es sey $AC = BC = DC = a$, $BD = x$; so ist $AB = V2a^2$ (§. 172. *Geom.*).

$BE = \frac{1}{2}V2a^2$ (§. 125. *Geom.*) $= V\frac{1}{2}a^2$ (§. 54).
$EC = V(a^2 - \frac{1}{2}a^2)$ (§. 172. *Geom.*) $= V\frac{1}{2}a^2$.
$DE = a - V\frac{1}{2}a^2$, folgends

$DE^2 = \frac{3}{2}a^2 - 2a\sqrt{\frac{1}{2}a^2}$

$BE^2 = \frac{1}{2}a^2$

$DB^2 = 2a^2 - 2a\sqrt{\frac{1}{2}a^2}$ (§. 172. *Geom.*)

$DB = \sqrt{(2a^2 - 2a\sqrt{\frac{1}{2}a^2})}$.

Zusatz.

167. Die halbe Seite des Acht-Eckes ist der Sinus des Bogens von 22° 30′ (§. 2. *Trig.*) diesen könnet ihr demnach durch gegenwärtige Aufgabe finden.

Die 63. Aufgabe.

Tab. I. Fig. 3.

168. Aus der gegebenen Seite des Achteckes DB den Radium des Circuls AC zu finden, der um dasselbe beschrieben werden kan.

Auflösung.

Es sey $DB = b$, $BC = y$, so ist, vermöge dessen, was bey der vorhergehenden Aufgabe erwiesen worden

$$b^2 = 2y^2 - 2y\sqrt{\tfrac{1}{2}y^2}$$

$$2y\sqrt{\tfrac{1}{2}y^2} = 2y^2 - b^2$$

$$2y^4 = 4y^4 - 4b^2y^2 + b^4$$

$$-b^4 = 2y^4 - 4b^2y^2$$

$$-\tfrac{1}{2}b^4 = y^4 - 2b^2y^2$$

b^4 b^4 (§. 83)

$$\tfrac{1}{2}b^4 = y^4 - 2b^2y^2 + b^4$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}b^4} = y^2 - b^2$$

$$b^2 + \sqrt{\tfrac{1}{2}b^4} = y^2$$

$$\sqrt{(b^2 + \sqrt{\tfrac{1}{2}b^4})} = \sqrt{(b^2 + b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2})} = y$$

Eine geometrische Construction hat man zwar nicht nöthig, weil sie aus den Anfangs Gründen der Geometrie leichter zu haben. Doch kan man den Radium y und den Mittelpunct des Circuls aus dem gefundenen Werthe folgender Gestalt finden. 1. Theilet die Seite des Acht-Eckes AB in zwey gleiche Theile in D und beschreibet darüber einen halben Circul AFB; so ist $AF = FB = \sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$ (§. 17. *Geom.*). 2. Ziehet aus dem Mittelpuncte D durch F eine gerade Linie DC, welche auf AB perpendicular stehet. 3. Machet $AE = 2AB + 2FB = 2b + 2\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$ und beschreibet über A

Tab. I. Fig. 4.

E

E einen halben Circul; so ist AC $= V(b^2 + bV\frac{1}{2}b^2)$ oder der verlangte Radius und in C der Mittelpunct des Circuls, der um das Acht-Ecke beschrieben wird (§. 210. *Geom*).

Es ist auch nicht nöthig, daß man AFB und ACE beschreibet, denn man darf nur AD und DF einander gleich machen, BF in BH tragen und mit HA den Perpendicul DC in C durchschneiden, so hat man den Mittelpunct C, daraus durch A und B der verlangte Circul beschrieben wird. Und diese Construction ist so beschaffen, daß man sie in die Anfangs-Gründe der Geometrie eintragen kan.

Die 64. Aufgabe.

Tabl. I. Fig. 5. 169. Aus dem gegebenen Radio des Circuls AC die Seite des Zehen-Eckes AB zu finden.

Auflösung.

Weil AB $= \frac{1}{10}$ der Peripherie, so ist der Winckel ACB 36°, folgends sind die Winckel CAB und ABC ein jeder 72 (§. 109. *Geom.*). Machet AD $=$ AC, so ist jeder von den Winckeln ADC und DCA 36 (§. 101. 107. *Geom.*) daher DCB 72°, und demnach BD : BC $=$ BC : BA (§. 183. *Geom.*). Es sey AC $=$ BC $=$ AD $= a$, AB $= x$, so ist BD $= a + x$, und dannenhero vermöge dessen, was erwiesen worden,

$a + x : a = a : x$

$a^2 = ax + x^2$

$\frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}x^2$ (§. 83).

$\frac{5}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + ax + x^2$

$\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{1}{2}a + x$

$\sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a = x$

Richtet auf dem Diameter AB den Radi- Tab. I.
um DC = *a* aus dem Mittelpuncte C per- Fig. 6.
pendicular auf (§. 95. *Geom.*) und theilet CB in 2 gleiche Theile in E, (§. 120. *Geom.*) so ist CE = $\frac{1}{2}a$ und folgends DE = $\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ (§. 172. *Geom.*) machet EF = DE, so ist CF = $\sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$.

Anmerckung.

170. Auf solche Art lehret Ptolemæus Almag. lib. 1. die Seite des Zehen-Eckes zu finden.

Die 65. Aufgabe.

171. Aus dem gegebenen Radio des Cir- Tab. I.
culs DC, die Seite des Fünf-Eckes AK zu Fig. 3.
finden.

Auflösung.

Es sey DC = *a* AB = *x*

so ist DB = $\sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$ (§. 169) BE = $\frac{1}{2}x$

EC = $\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$

DE = $(a - \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$

Fol-

Folgends

$$DE^2 = 2a^2 - \tfrac{1}{4}x^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \tfrac{1}{4}x^2)}$$
$$BE^2 = \tfrac{1}{4}x^2$$

also $DB^2 = 2a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$

es ist auch $DB^2 = \frac{5}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$

daher $\frac{1}{2}a^2 + a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} = 0$

(§. 31. Ar.)

$$\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} = 2\sqrt{(a^2 - \tfrac{1}{4}x^2)}$$

a

$$\tfrac{5}{4}a^2 + a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} = 4a^2 - x^2$$

$$x^2 = \tfrac{10}{4}a^2 - a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$
$$= a^2 + \tfrac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$

Tab. I. Fig. 5. Demnach $AB^2 = DC^2 + DB^2$, das ist, das Qvadrat des regulären Fünff-Eckes ist gleich dem Qvadrate des Sechs- Eckes und Zehn-Eckes, die in einem Circul beschrieben sind, zusammen genommen. Daher weil DC die Seite des Sechs-Eckes und FC die Seite des Zehn-Eckes (§. 109); so ist DF die Seite Fünff-Eckes.

Tab. I. Fig. 6.

Anmerckung.

172. Ptolemæus lehret abermahl die Seite des Fünff-Eckes auf solche Art finden.

Zusatz.

173. Die halbe Seite des Fünff-Eckes ist der Sinus von 36°, die halbe Seite des Zehen-E-

ckes

ckes der Sinus von 18° (§. 2. *Trig.*) Derowegen könnet ihr aus dem gegebenen Radio des Circuls diese beyden Sinus finden (§. 11. *Trig.*).

Die 66. Aufgabe.

174. Eine gerade Linie AC dergestalt in F zu schneiden, daß die ganze Linie AC sich zu dem grossen Theile CF verhält, wie der grosse Theil CF zu dem kleinen FA, oder daß $CF^2 = AC$ in FA. Tab. I. Fig. 6.

Auflösung.

Es sey $AC = a$, $CF = x$, so ist $FA = a - x$ und also $x^2 = aa - ax$.

$$x^2 + ax = a^2$$

$$\tfrac{1}{4}a^2 \quad \tfrac{1}{4}a^2 \text{ (§. 83)}$$

$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{5}{4}a^2$$

$$x + \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$

$$x = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a$$

Setzet $AC = DC = a$ rechtwincklicht zusammen, und machet $CE = \frac{1}{2}a$, so ist $DE = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ (§. 172. *Geom.*). Machet ferner $EF = DE$, so ist die Linie AC in F auf verlangte Art getheilet. Tab. I. Fig. 6.

Anmerckung.

175. Die alten Geometræ nennen dieses lineam media & extrema ratione secare. Man pfleget es auch divinam sectionem zu nennen/weil (wie aus dem Euclide zu sehen) man viel aus dieser Linien-Theilung demonstriret hat.

Zusatz.

176. Wenn *a* der Radius eines Circuls ist, so ist der grosse Theil von der Linie *x* die Seite des Zehen-Eckes (§. 169).

Die 67. Aufgabe.

Tab. I. Fig. 7.

177. Aus der gegebenen Hypothenuse eines rechtwincklichten Dreyeckes AB und seinem Inhalte das Dreyecke ABD zu zeichnen.

Auflösung.

Es sey AB $= a$ der Perpendicul DC $= y$
der Inhalt $= bb$ so ist der Inhalt $= \frac{1}{2}ay$
(§. 156. *Geom.*)

und demnach $\frac{1}{2}ay = bb$

$$y = \frac{2bb}{a}$$

Beschreibet über AB $= a$ einen halben Circul: richtet in A auf dem Diameter AE $2b$ perpendicular auf und ziehet die Linie EB. Machet AG $= \frac{1}{2}$AE $= b$ und ziehet FG mit EB parallel; so ist AF $= 2bb : a$ (§. 187. *Geom.*). Wenn demnach FD mit dem Diameter AB parallel gezogen wird; so giebet sich der verlangte Triangel ADB.

Die 68. Aufgabe.

Tab. I. Fig. 8.

178. Aus dem gegebenen Umfange AB + BC + CA eines rechtwincklichten Triangels und seinem Inhalte, die gröste Seite BC zu finden. Auf-

Auflösung.

Es sey $AB+BC+CA = a$, $BC = x$,
der Inhalt $= bb$ so ist $AC+BA = a-x$

$(AC+BA)^2 = a^2-2ax+x^2$
$AC^2+BA^2 = x^2$ (§. 172. *Geom*)

$2BA.AC = a^2-2ax$ (§. 93. *Arithm.*)

Daher (§. 156. *Geom.*)

$a^2-2ax = 4bb$

$a^2-4bb = 2ax$

$\frac{1}{2}a-\frac{2bb}{a} = x$

Suchet zu $AB = a$, $BC = 2b$ und $BD = b$ die vierdte Proportional-Linie $BE = 2bb:a$ (§. 187. *Geom.*). Beschreibet mit $BF = \frac{1}{2}a$ den Bogen FG; so ist $EG = x$ und ihr könnet den verlangten Triangel nach der vorhergehenden Aufgabe beschreiben. Tab. II. Fig. 9.

Anmerckung.

179. Weil alle Flächen durch das Qvadrat ausgemessen werden (§. 147. *Geom.*); so giebet man in geometrischen Aufgaben jederzeit die Fläche durch eine Linie/ deren Qvadrat ihr gleich ist.

Die 69. Aufgabe.

180. Aus der gegebenen Grund-Linie BC und den beyden Winckeln an derselben B und C die Höhe AD zu finden. Tab. II. Fig. 10

Auflösung.

Es sey $BC = a$, $AD = x$. Weil bey D rechte Winckel sind, so wisset ihr auch die Winckel BAD und DAC (§. 102. *Geom.*). Es sey der Sinus des Winckels $ABD = t$, der Sinus des Winckels $BAD = r$, der Sinus des Winckels $DAC = q$, der Sinus des Winckels $ACD = p$, so ist $t : r = x : BD$ und $p : q = x : DC$, (§. 43. *Trigon.*) folgends $BD = rx : t$ und $DC = qx : p$. Derowegen weil $BC + DC = BC$, so habet ihr

$$rx : t + qx : p = a$$

$$\frac{}{} - \frac{}{} \quad pt$$

$$prx + tqx = apt$$

$$\frac{}{} \quad \frac{}{} \quad pr + tq$$

$$x = apt : (pr + tq)$$

Anders.

Wenn ihr AD als den Sinum totum ansehet, so ist BD der Tangens des Winckels BAD, und DC der Tangens des Winckels DAC (§. 6. *Trigon.*). Es sey der Sinus Totus $= t$, die Tangentes seyn m und n, so ist $t : m = x : BD$ und $t : n = x : DC$, folgends ist $BD = mx : t$, und $DC = nx : t$ und demnach

$$a = (nx + mx) : t$$

$$\frac{}{} \quad \frac{}{} \quad \frac{}{}$$

$$at = nx + mx$$

$$\frac{}{} \quad \frac{}{} \quad n + m$$

$$at : (n + m) = x$$

Suchet also zu der Summe der Tangentium

der

der beyden Winckel BAD und DAC dem Sinu Toto und der Grund-Linie BC die vierdte Proportional-Zahl (§. 113. *Arithm.*); so kommet die Höhe des Triangels AD heraus.

Die 70. Aufgabe

181. Aus drey gegebenen Seiten eines Triangels AB, AC und CB die Höhe AD zu finden. Tab. I. Fig. 10.

Auflösung.

Es sey $AB = a$ $BD = x$

$BC = b$ so ist $DC = b - x$

$AG = c$

Weil nun $AB^2 - BD^2 = AD^2$ und $AC^2 - DC^2 = AD^2$ (§. 172. *Geom.*), so ist auch $AB^2 - BD^2 = AC^2 - DC^2$, folgends

$$a^2 - x^2 = c^2 - b^2 + 2bx - x^2$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2bx$$

$$\frac{a^2 - c^2}{2b} + \frac{1}{2}b = x$$

Folgends $(a^2 - c^2) : b = (a + c)(a - c) : b$ der halbe Unterscheid der Theile CD u. BD (§. 61).

Lehrsatz.

Wenn in einem Triangel ACB aus dem Scheitel-Puncte A auf die Grund-Linie CB ein Perpendicul AD gefället wird; so verhält sich die Grund-Linie BC zu den beyden Schenckeln AB und AC zusammen genom-

men, wie der Unterscheid derselben zu dem Unterscheide der Theile von der Grund-Linie BD und CD.

Wenn ihr BD habet, so könnet ihr (§. 172. *Geom.*) AD finden.

Es sey $a = 6, b = 4, c = 3$, so ist $x = (36 - 9) : 8 + 2 = 27 : 8 + 2 = 5 + \frac{3}{8}$ oder $= (9.3) : 8 + 2 = 27 : 8 + 2 = 3\frac{3}{8} + 2 = 5\frac{3}{8}$.

$AB^2 = 2.3.0.4 : 64$
$+ D^2 = 1\ 8\ 4\ 9 : 64$

$AD^2 = 4\ 5\ 5 : 64$ (§. 172. *Geom.*)

4|55|00|00 { $21\frac{33}{100}$ demnach ist
4|

55|
41|

14.|0.0|
4|23|

12|69|

1|3.1.|0.0
|42|63

1|27|89

3|11

AD = 2133 : 800.

Anmerckung.

182. Auf eine gleiche Weise könnet ihr aus den gegebenen Seiten die Höhe des Triangels finden / wenn er stumpfwincklicht ist.

Zusatz.

183. Derowegen könnet ihr auch aus drey gegebenen Seiten den Inhalt eines Triangels finden, (§. 156. *Geom.*).

Die 71. Aufgabe.

184 Aus dem gegebenen Inhalte eines rechtwincklichten Triangels ABC, dessen drey Seiten AC, BA, BC in einer geometrischen Progreßion sind, die Seiten selbst zu finden. Tab. I. Fig. 8.

Auflösung.

Es sey der Inhalt $= a^2$ $AB = y$

$CA = x$

so ist $BC = \frac{x^2}{y}$ (§. 113. *Arith.*

und demnach

$x^4 : y^2 = x^2 + y^2$ (§. 172. *Geom.*) $xy = 2a^2$ (§. 156. *Geom.*

$x^4 = x^2 y^2 + y^4$ $x = 2a^2 : y$

$x^4 - x^2 y^2 = y^4$ $x^2 = 4a^4 : y^2$

$x^4 = 16a^8 : y^4$

ingleichen $y = 2a^2 : x$

$y^2 = 4a^4 : x^2$

$y^4 = 16a^8 : x^4$

Hieraus nun wird gefunden

$$\frac{16a^8 - 4a^4 = y^4}{y^4}$$

$$16a^8 - 4a^4y^4 = y^8$$

$$16a^8 = y^8 + 4a^4y^4$$

$$\frac{4a^8 \quad 4a^8}{}$$

$$20a^8 = y^8 + 4a^4y^4 + 4a^8$$

$$2a^4\sqrt{5} = y^4 + 2a^4$$

$$a^4(2\sqrt{5} - 2) = y^4$$

$$\sqrt[4]{a}\,(2\sqrt{5} - 2) = y$$

$$\frac{x^4 - 4a^4 = 16a^8}{x^4}$$

$$x^8 - 4a^4x^4 = 16a^8$$

$$\frac{4a^8 \quad 4a^8}{}$$

$$x^8 - 4a^4x^4 + 4a^8 = 20a^8$$

$$x^4 - 2a^4 = 2a^4\sqrt{5}$$

$$x^4 = a^4(2 + 2\sqrt{5})$$

$$x = \sqrt[4]{a}\,(2 + 2\sqrt{5})$$

Tab. I. Fig. 11. Richtet auf AB = a eine Perpendicular-Linie CA = $2a$ auf; so ist BC = $\sqrt{5}aa$. Machet DB = AB = a; so ist DC = $\sqrt{5}aa - a$. Traget DC aus C in E und aus E in K die Linie CA = $2a$, und beschreibet so wohl über AE als AK einen halben Circul. Ziehet durch C mit AB die Linie FL parallel; so ist FC = $\sqrt{(2a\sqrt{5}aa - 2aa)}$ und CL = $\sqrt{(2aa + 2a\sqrt{5}aa)}$, oder FC = $\sqrt{(2a^2\sqrt{5} - 2a^2)}$ = $a\sqrt{(\sqrt{5} - 2)}$ und CL = $a\sqrt{(2 + 2\sqrt{5})}$. Theilet CA in zwey gleiche Theile in H, daß CH = a, und machet CG = CF und CM = CL. Beschreibet sowohl über HG, als HM einen halben Circul; so ist CI = $\sqrt{(aa}$

$\sqrt{}$

$V(2V5-2)) = {}^{4}aV(2V5-2) = y$, und CN $= V(a^2V(2+2V5)) = {}^{4}aV(2+2V5) = x$. Derowegen wenn ihr CO = CN machet und die Linie IO ziehet; so ist ICO der verlangte Triangel.

Die 72. Aufgabe.

185. Aus der gegebenen Summe der Seiten $AC + AB$ in einem rechtwinklichten Triangel CAB und dem Perpendicul AD die Seiten zu finden. Tab. I. Fig. 8.

Auflösung.

Es sey $AB + AC = a$, $CA - BA = y$, $BC = x$, $AD = b$; so ist $AC = \frac{1}{2}(a+y)$, $AB = \frac{1}{2}(a-y)$ (§. 61. §. 172. *Geom.* und §. 183. *Geom.*) folgends

$x^2 = \frac{1}{2}(aa+yy)$

$2x^2 = aa+yy$

$2x^2 - a^2 = y^2$

BA : DA = BC : AC

$\frac{1}{2}(a-y) : b = x : \frac{1}{2}(a+y)$

$\frac{1}{4}(aa-yy) = bx$

$aa - 4bx = yy$

Derowegen $2x^2 - aa = aa - 4bx$

$x^2 + 2bx = aa$

$x^2 + 2bx + = aa + bb$ (§. 83).

$x = V(aa+bb) - b$

Tab. I. Fig. 12. Auf der gegebenen Linie CD = *a* beschreibet ein Rectangulum CDFG, dessen Höhe DF der Höhe des Triangels *b* gleich ist: so ist CF = $V(a^2+b^2)$. Machet FE = FD und CB = CE; so ist CB = $V(a^2+b^2)-b$. Beschreibet demnach über CB einen halben Circul und ziehet die Linien AB und AC; so ist CAB der verlangte Triangel.

Die 73. Aufgabe.

186. Aus dem gegebenen Sinu eines Winckels den Sinum des doppelten, dreyfachen, vierfachen ꝛc. Winckels zu finden.

Tab. II. Fig. 13.

Auflösung.

Es sey der einfache Winckel LAM. Nehmet BA für den Sinum Totum an und machet AB = BC = DC = DE = EK, so ist BF der Sinus des Winckels A (§. 3. *Trigon.*) und AF = FC (§. 107. *Geom.*) der Cosinus (§ 7. *Trigon.*) ferner DBC = 2 BAC (§. 101. 107. *Geom.*), DCE = CDA + CAD (§. *cit.*) = 3 CAD, KDE = DEA + KAE (§. *cit.*) = 4 KAE u. s. w. Weil nemlich CDA = CBD (§. 107 *Geom.*) = 2 BAC, wie erwiesen worden, und DEA = DCE (§. 107 *Geom.*) = 3 KAE, wie gleichfals erwiesen worden. Folgends ist GC der Sinus des doppelten, DH des dreyfachen, EI des vierfachen Winckels A (§. 3. *Trigon.*) hingegen BG der Cosinus des doppelten, CH des dreyfachen, DI des vierfachen Winckels (§. 7 *Trigon.*).

Es

Es sey $AB = r$, $BF = b$, $AF = c$
so ist $AB : BF = AC : GC$ (§. 183. *Geom.*)
$r \quad b \quad 2c \quad 2bc : r$
$AB : AF \quad AC : AG$ (§. *cit.*)
$r \quad c \quad 2c \quad 2cc : r$

Derowegen ist $BG = GD = 2cc : r - r = (2cc - rr) : r$ = [weil $r^2 = b^2 + c^2$] $(2cc - b^2 - c^2) : r = (c^2 - b^2) : r$, folgends $AD = AG + GD = (3c^2 - b^2) : r$.

Es ist ferner (§. 184. *Geom.*)

$AB : BF = AD : DH$

$$r : b = \frac{3c^2 - b^2}{r} : \frac{3bc^2 - b^3}{r^2}$$

$AB : AF = AD : AH$

$$r : c = \frac{3c^2 - b^2}{r} : \frac{3c^3 - b^2c}{r^2}$$

Derowegen ist $CH = HE = AH - AC = (3c^3 - b^2c) : r^2 - 2c = (3c^3 - b^2c - 2cr^2) : r^2 = $ [weil $r^2 = c^2 + b^2$] $(3c^3 - b^2c - 2c^3 - 2b^2c) : r^2 = (c^3 - 3b^2c) : r^2$, folgends $AE = EH + HA$ $(3c^3 - b^2c + c^3 - 3b^2c) : r^2 = (4c^3 - 4b^2c) : r^2$.

Es ist weiter (§. 183. *Geom.*)

$AB : BF = AE : EI$

$$r : b = \frac{4c^3 - 4b^2c}{r^2} : \frac{4bc^3 - 4b^3c}{r^3}$$

$AB : AF = AE : AI$

$$r : c = \frac{4c^3 - 4b^2c}{r^2} : \frac{4c^4 - 4b^2c^2}{r^3}$$

Der

Derowegen ist $DI = AI - AD = (4c^4 - 4b^2c^2) : r^3 - (3c^2 + b^2) : r = (4c^4 - 4b^2c^2 - 3c^2r^2 + b^2r^2) : r^3 = (4c^4 - 4b^2c^2 - 3b^2c^2 - 3c^4b^4 + b^2c^2) : r^3 = (c^4 - 6b^2c^2 + b^4) : r^3$, weil nemlich $r^2 = b^2 + c^2$.

Wenn demnach der Sinus totus r der Sinus des einfachen Winckels b, und sein Cosinus c ist, so ist der Sinus

des zwiefachen $2bc : r$
des dreyfachen $(3bc^2 - b^3) : r^2$
des vierfachen $(4bc^3 - 4b^3c) : r^3$
des fünffachen $(5bc^4 - 10b^3c^2 + b^5) : r^4$
des sechsfachen $(6bc^5 - 20b^3c^3 + 6b^5c) : r^5$

Hingegen der Sinus Complementi oder Cosinus

des zwiefachen $(cc - bb) : r$
des dreyfachen $(c^3 - 3b^2c) : r^4$
des vierfachen $(c^4 - 6b^2c^2 + b^4) : r^3$
des fünffachen $(c^5 - 10b^2c^3) + 5b^4c) : r^4$
des sechsfachen $(c^6 - 15b^2c^4 + 15b^4c^2 - b^6) : r^5$

Wenn ihr diese Formuln gegen das Potentzen-Täffelein (§. 91) haltet, so werdet ihr wahrnehmen, daß die Glieder vor die Sinus aus den geraden, vor die Cosinus aber aus den ungeraden Stellen der Potentzen genommen werden, nur daß das Mehr- und Minder-Zeichen beständig abwechselt. Woltet ihr demnach allgemeine Formuln haben; so dörffet ihr sie nur aus der allgemeinen Formul für die Potentzen ausschreiben. Nemlich der Sinus des vielfachen Bogens ist

$$mc^{m-1}b - \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3.}c^{m-3}b^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.}{1.2.3.4.5.}c^{m-5}b^5 \text{ \&c.}$$
$$r^{m-1} \qquad r^{m-1}$$

Hingegen sein Cosinus ist

$$c^m - \frac{m.m-1}{1.2.}c^{m-2}b^2 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4.}c^{m-4}b^4 \text{ \&c.}$$
$$r^{m-1} \qquad r^{m-1}$$

Zusatz.

187. Weil der Tangens des einfachen Winckels $t = br : c$ und also $c = br : t$ (§. 18. *Trigon.*) und §. *cit.*) wenn der Tangens des zwiefachen v ist

$$\frac{c^2 - b^2}{r} : \frac{2bc}{r} = r : v$$

das ist $c^2 - b^2 : 2bc = r : v$

oder $\frac{b^2r^2 - b^2}{t^2} : \frac{2b^2r}{t} = r : v$

so ist $r^2 - t^2 : 2tr = r : v$

und $v = \frac{2tr^2}{r^2 - t^2}$

Anmerckung.

188. Auf eben diese Art könnet ihr die Tangentes der übrigen vielfachen Winckel/ ja auch eine allgemeine Formul für alle Tangentes der vielfachen Winckel finden. Ihr könnet aber auch die Tangentes suchen/ ohne daß ihr nöthig habet/ die Sinus zu wissen/ wie in der folgenden Aufgabe gezeiget wird. Und dazu habet ihr folgenden Satz nöthig.

Wenn der Winckel CAB durch die Linie Tab. II.
EA Fig. 14.

EA in zwey gleiche Theile getheilet wird, so verhält sich die eine Seite AB zu dem ihr anliegenden Theile der Grund-Linie BE, wie die Seite AC zu dem Theile EC, so an ihr lieget.

Beweiß.

Verlängert BA in D, biß AD = AC und ziehet die Linie CD. Weil der Winckel CAB = ACD + ADC (§ 101. *Geom.*) und ACD = ADC (§. 107. *Geom.*); so ist ACD = $\frac{1}{2}$ CAB = CAE, folgends EA mit CD parallel (§. 98. *Geom.*), und daher BA : BE = AD (= AC) : EC (§. 184. *Geom.*). W. Z. E.

Zusatz.

189. Derowegen verhält sich auch BA : AC = BE : EC, folgends BA + AC : AC = BC : EC (§. 142).

Die 74. Aufgabe.

Tab. II. Fig. 15.

190. Aus dem Tangante und Secante des einfachen Winckels die Tangentes und Secantes des zweyfachen, dreyfachen, vierfachen ꝛc. zu finden.

Auflösung.

Nehmet AB für den Sinum totum an, so ist BC der Tangens des einfachen Winckels CAB, BD der Tangens des zwiefachen DAB u. s. w.

Es sey AB = a, BC = b, BD = x; so ist CD = $x-b$, $CD^2 = x^2 - 2bx + b^2$, $AD^2 = aa + xx$. Nun ist AB : AD = BC : CD (§. 187), und

und daher $AB^2 : AD^2 = BC^2 : CD^2$ (§. 142), das ist,

$$a^2 : a^2 + x^2 = b^2 : x^2 - 2bx + b^2$$

$$a^2 b^2 + b^2 x^2 = a^2 x^2 - 2a^2 bx + a^2 b^2$$

$$2a^2 bx = a^2 x^2 - b^2 x^2$$

$$a^2 x - b^2 x$$

$$2a^2 b : (a^2 - b^2) = x$$

Derowegen ist $CD = x - b = 2a^2 b : (a^2 - b^2)$
$-b = (2a^2 b - a^2 b + b^3) : (a^2 - b^2) = (a^2 b + b^3)$
$: (a^2 - b^2)$.

Die Secantem AD findet ihr nun also.

$BC : CD = AB : AD$ (§. 187).

$$b : \frac{a^2 b + b^3}{\sqrt{a^2 - b^2}} = a : AD$$

das ist $1 : \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} = a : AD$

folgends $AD = (a^3 + ab^2) : (a^2 - b^2)$

Oder wenn ihr den Secantem des einfachen Winckels $AC = V(a^2 + b^2) = c$ setzet, so ist $AD = ac^2 : (a^2 - b^2)$.

Auf gleiche Art wird der Tangens des dreyfachen Winckels $BE = (3a^2 b - b^3) : (a^2 - 3b^2)$ und der Secans $AE = c^3 : (a^2 - 3b^2)$ gefunden, u. s. w.

Die 75. Aufgabe.

191. Aus dem gegebenen Inhalte eines rechtwincklichten Triangels ABC und dem Winckel B die Seiten. Tab. I. Fig. 8.

Auflö-

Auflösung.

Es sey der Inhalt $= b^2$ AB $= x$
der Sinus Totus $= r$ so ist:
der Tangens B $= t$ $r : t = x :$ AC (§. 6.
daher AC $= tx : r$ *Trig.*)
Folgends $tx^2 : 2r = b^2$

$$x^2 = (2b^2r : t)$$

$$x = \sqrt{(2b^2r : t)}$$

Tab. II, Fig. 16. Machet in dem gegebenen Winckel EDA die Seite DA $= 2b$ und richtet AE perpendicular auf; so ist zugleich AD $= r$ und AE $= t$. Verlängert EA in G und richtet in D die perpendicular Linie DG auf; so ist AG $= 2br : t$ (§. 210. *Geom.*). Machet AH $=$ AG und theilet AD in 2 gleiche Theile in I, daß AI $= b$. Werffet über HI einen halben Circul; so ist (§. 210. *Geom.*) AL $= \sqrt{(2b^2r : t)}$. Machet endlich AB $=$ AL und ziehet aus B die Linie BC mit DE parallel; so ist ABC der verlangte Triangel. Denn weil CBA $=$ EDA (§. 97. *Geom.*), so hat der bey A rechtwincklichte Triangel den verlangten Winckel und da ferner die Seite BA durch die algebraische Rechnung gefunden worden; so ist CAB der verlangte Triangel (§. 81. *Geom.*).

Die 76. Aufgabe.

Tab. II. Fig. 17. 192. Ob des Renaldini Regel in einem Circul ein jedes reguläres Viel-Ecke zu beschrei-

schreiben richtig sey oder nicht, zu untersuchen.

Auflösung.

Die Regel des Renaldini ist diese: Wenn man über dem Dianieter AB einen gleichseitigen Triangel aufrichtet, den Diameter AB aber in so viel gleiche Theile theilet, als die Peripherie soll getheilet werden, und aus F durch den andern Theilungs-Punct D die Linie FG ziehet; so ist BG die Seite des verlangten Viel Eckes. Wir wollen durch das Acht Ecke zeigen, daß die Regel unrichtig ist. Denn in andern Fällen verfähret man auf gleiche Weise. Es sey demnach der halbe Diameter CB = 1, die halbe Seite des Vier-Ecks EG = x, und BG sey die Seite des Acht-Eckes; so ist CD = $\frac{1}{2}$ vermöge der Regel und FC = $\sqrt{3}$ (§. 162). Weil nun FCB und GEG rechte Winckel sind, und CDF = GDE (§. 61. *Geom.*); so ist (§. 183. *Geom.*)

$$FC.CD = EG:DE$$
$$\sqrt{3}:\tfrac{1}{2} = x:x$$
$$2\sqrt{3}$$

Daher ist $CE = \frac{1}{2} + x = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} + x$, folgends

weil $CE^2 + EG^2 = CG^2$ (§. 172. *Geom.*)

$$3 + 2x\sqrt{3} + x^2 + x^2 = 1$$
$$12$$

$$3+2x\sqrt{3}+13x^2=12$$

$$13x^2+2x\sqrt{3}=9$$

$$x^2+\tfrac{2}{13}x\sqrt{3}=\tfrac{9}{13}$$

$$x^2+\tfrac{2}{13}x\sqrt{3}+\tfrac{3}{13\cdot 13}=\tfrac{9}{13}+\tfrac{3}{13\cdot 13}=\tfrac{120}{13\cdot 13}$$

$$\tfrac{1}{13}\sqrt{3}+x=\tfrac{1}{13}\sqrt{120}=\tfrac{2}{13}\sqrt{30}\ (\S.\ 50)$$

$$x=\tfrac{2}{13}\sqrt{30}-\tfrac{1}{13}\sqrt{3}$$

Nun ist aber $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}=\sqrt{\frac{1}{2}}$ (§. 16. *Trigon.*) Derowegen erhellet, daß die Regel des Renaldini die halbe Weite des Viereckes unrichtig heraus bringet, wie noch klärer erhellet, wenn man in zehentheiligen Brüchen so wohl aus dem Renaldinischen als dem wahren Werthe die Wurtzel heraus ziehet.

Die 77. Aufgabe.

193. Einen Circul zu finden, der so groß ist als die Fläche eines gegebenen Cylinders.

Auflösung.

Es sey der Diameter des Cylinders $= d$, seine Peripherie $= p$, die Höhe $= a$, so ist die Fläche $= ap$ (§. 221. *Geom.*). Es sey ferner der Diameter des Circuls $= x$, so ist $d:p=x:(px:d)$. Und demnach die Peripherie des Circuls $px:d$, folgends seine Fläche $px^2:4d$ (§. 168. *Geom.*). Derowegen ist

px^2

$px^2 : 4d = ap$

$x^2 = 4ad$

$x = V\,4ad = 2V\,ad$

oder $\frac{1}{2}x = V\,ad$

Der halbe Diameter des verlangten Circuls ist die mitlere Proportional-Linie zwischen der Höhe und dem Diameter des Cylinders.

Lehrsatz.

Die Fläche des Cylinders ist gleich einem Circul, dessen Radius die mittlere Proportional-Linie ist zwischen der Höhe und dem Diameter des Cylinders.

Die 78. Aufgabe.

194. Aus der gegebenen Verhältnis der Höhe eines Cylinders zu seinem Diameter und dem Diameter eines Circuls, der seiner Fläche gleich ist, die Höhe des Cylinders und seinen Diameter zu finden.

Auflösung.

Es sey die gegebene Verhältnis $m : n$, der Diameter des Circuls $= d$, seine Peripherie $= p$, die Höhe des Cylinders $= x$; so ist sein Diameter $= nx : m$ und seine Peripherie $= npx : md$, folgends

$npx^2 : md = \frac{1}{4}pd$

$x^2 = md^2 : 4n$

$x = V\,(md^2 : 4n)$

Tab. II. Fig. 18. Machet AB = n und richtet darauf perpendicular auf BC = m. Machet ferner AD = $\frac{1}{2}d$ und richtet in D die Perpendicular-Linie DE auf = $md : 2n$. Machet endlich DF = DE und beschreibet über AF einen halben Circul; so ist DG = $\sqrt{md^2} : \sqrt{4n}$ (§. 210. *Geom.*)

Die 79. Aufgabe.

195. Aus dem gegebenen Diameter einer Kugel und der Höhe eines Cylinders, der ihr gleich ist, den Diameter des Cylinders zu finden.

Auflösung.

Es sey die Höhe des Cylinders = a, der Diameter der Kugel = d, ihre Peripherie = p, der Diameter des Cylinders = x; so ist der Inhalt der Kugel = $\frac{1}{6}pd^2$ (§. 237. *Geom.*) die Peripherie des Cylinders $px : d$, sein Inhalt $apx^2 : 4d$ (§. 221. *Geom.*) und demnach

$$\frac{\frac{1}{6}pd^2 = apx^2 : 4d}{\frac{4}{6}pd^3 = apx^2}$$

$$\frac{\frac{4}{6}pd^3 = apx^2}{ap}$$

$$\frac{\frac{2d^3}{3} = x^2}{3a}$$

$$\sqrt{(2d^3 : 3a)} = x$$

Tab. II. Fig. 18. Es wird also der Werth von x eben wie in der vorhergehenden Aufgabe gefunden. Nemlich man machet AB = a, BC = $\frac{2}{3}d$ und AD = d; so ist DE = DF = $2d^2 : 3a$ folgends DG = $\sqrt{(2d^3 : 3a)}$.

Die

Die 80. Aufgabe.

196. Aus dem gegebenen Diameter und der Höhe eines Coni, den Diameter eines Cylinders zu finden, der ihm der Höhe und dem Inhalte nach gleich ist.

Auflösung.

Es sey der Diameter des Coni $= d$, die Höhe $= a$, der Diameter des Cylinders $= x$, die Verhältnis des Diametri zur Peripherie $= d : p$; so ist der Inhalt des Coni $= \frac{1}{12} adp$ (§. 229. *Geom.*), die Peripherie des Cylinders $px : d$, und sein Inhalt $apx^2 : 4d$ (§. 221. *Geom.*), folgends

$$\frac{\frac{1}{12} adp = apx^2 : 4d}{\frac{1}{3} ad^2 p = apx^2} \quad \frac{4d}{ap}$$

$$\frac{\frac{1}{3} d^2 = x^2}{}$$

$$\sqrt{\frac{1}{3} d^2} = x$$

Beschreibet auf dem Diameter des Kegels d einen gleichseitigen Triangel und darum einen Circul; diese ist viermahl so groß als die Grund-Fläche des Cylinders (§. 164), folgends wenn um den Radium dieses Circuls eine andere beschrieben wird; ist derselbe die verlangte Fläche des Cylinders.

Die 81. Aufgabe.

197. Aus dem gegebenen Diameter eines

Coni und seiner Höhe, den Diameter einer Kugel zu finden, die ihm gleich ist.

Auflösung.

Es sey der Diameter der Grundfläche des Coni $= d$, seine Peripherie $= p$, die Höhe $= a$, der Diameter der Kugel $= x$; so ist der Inhalt des Coni $= \frac{1}{12} adp$ (§. 219. *Geom.*) hingegen der Inhalt der Kugel $px^3 : 6d$ (§. 237. *Geom.*). Derowegen ist

$$\tfrac{1}{12} adp = px^3 : 6d$$

$$\tfrac{1}{2} ad^2 = x^3$$

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{2} ad^2} = x$$

Anmerckung.

198. Bißher habe ich in leichten geometrischen Exempeln den Nutzen der Algebra gezeiget: nun aber wird es Zeit seyn/ daß ich darthue/ wie man in der höheren Geometrie mit sonderbahrem Vortheile sich derselben bediene. Es handelt aber die höhere Geometrie von den krummen Linien. Derowegen sol ich zeigen/ wie man durch Hülffe der Algebra die Eigenschaften der krummen Linien finden kan. Zwar dienet darzu hauptsächlich die Differential- und Integral-Rechnung/ von der im andern Theile gehandelt werden sol: allein man kan auch durch die gemeine Algebra gar viel ausrichten. Damit ihr aber verstehen möget/ was hinfort beygebracht werden sol; so muß überhaupt etwas von den krummen Linien angeführet werden. Bildet euch aber nicht ein/ als wenn diese Betrachtung gantz fruchtloß wäre. Vielmehr versichert euch/ daß sie denenjenigen sehr zustatten kommet/ welche die Geheimnisse der Natur und Kunst genauer als andere einsehen belieben. Ich würde jetzt vergeblich reden/ wenn ich einen weitläuftigen Beweiß hiervon führen wolte.

Hier

Hier mercket nur überhaupt / daß man gewohnet ist die krummen Linien durch algebraische Gleichungen zu erklären / welche die Relation gewisser geraden Linien / die man innerhalb denselben ziehen kan / gegen einander andeuten. Z. E. Es sey AMB ein halber Circul und in demselben PM auf dem Diameter AB perpendicular. Setzet $AB = a$, $AP = x$; so ist $PB = a - x$. Es sey ferner $PM = y$; so ist beständig $y^2 = ax - xx$ (§. 210. *Geom.* & §. 137. *Algebr.*) Derowegen drucket die Gleichung die Relation aus / welche die Linie PM zu AP in allen Puncten der Peripherie AMB hat. Und darum nennet man sie die Erklärung des Circuls. Oder es sey $AC = a$, $PC = x$, $PM = y$; so ist $a^2 - x^2 = y^2$ (§. 172. *Geom.*). Derowegen drucket diese Gleichung die Relation aus / welche PM und PC in allen Puncten der Peripherie gegen einander haben. Und also nennet man auch sie eine Erklärung des Circuls. Gleichwie nun aber alles / was von der Sache erkandt werden kan aus ihrer Erklärung hergeleitet wird (§. 2. Meth. Math.; so pfleget man auch aus dergleichen Gleichungen durch die Algebra die Eigenschaften der krummen Linien herzuleiten. Tab. II. Fig. 19.

Von den krummen Linien.

Die 13. Erklärung.

199. Die Linie AX, welche alle gerade Linien MM, die mit einander innerhalb einer krummen Linie parallel gezogen werden, in zwey gleiche Theile PM und PM theilet, wird der Diameter, und insonderheit die Axe genennet, wenn sie mit eben den Linien einen rechten Winckel machet. Tab. II. Fig. 20.

Die 14. Erklärung.

200. Die Linien MM werden die Ordinaten; ihre Helfften aber PM die Semiordinaten genennet.

Die 15. Erklärung.

201. Hingegen die Abscisse AP ist das Stücke des Diameters oder der Axe, welches die Ordinaten MM abschneiden.

Die 16. Erklärung.

Tab. II. Fig 29.

202. Der Scheitel der krummen Linie ist der Punct A, darinnen sich die Axe oder auch der Diameter AX ender.

Die 17. Erklärung.

203. Eine algebraische Linie wird genennet, deren Natur durch eine algebraische Gleichung sich erklären lasi.

Die 1. Anmerckung.

204. Durch die algebraische Gleichungen verstehen wir diejenigen, die einerley Grad haben in allen Puncten der krummen Linie. Dergleichen ist die Gleichung des Circuls $y^2 = ax - x^2$, oder auch $a^2 - x^2 = y^2$ (§. 198).

Die 2. Anmerckung.

205. Man nennet insgemein mit dem *des Cartes* die algebraischen Linien **geometrische Linien**: allein wir sind bey der Benennung des Herrn von Leibnitz geblieben, mit welchen auch der grosse Engelländische Geometra *Newton* übereinstimmet, welcher (in Arithm. Univ. p. 280.) wohl erinnert, daß nicht die Gleichung Ursache sey, warum man eine krumme Linie zu Auflösung der Fragen in die Geometrie nehmen sol, sondern es solle vielmehr darum geschehen, weil sie sich leicht beschreiben lasi.

Die

Die 18. Erklärung.

206. Eine transcendentische Linie wird genennet, deren Natur durch keine algebraische Gleichung sich erklären läst.

Anmerckung.

207. Insgemein nennet man die transcendentischen Linien mechanische Linien / abermahls mit dem *des Cartes*, und wirft solchergestalt viel Linien aus der Geometrie / die sich leicht beschreiben lassen: welches wir mit dem Herrn von Leibnitz mit Recht misbilligen / als welcher eine besondere Art der Gleichungen für diese Linien erfunden / dadurch ihre Eigenschaften so wohl als der algebraischen Linien herausgebracht werden.

Die 19. Erklärung.

208. Alle algebraische Linien werden zu einem Geschlechte gerechnet / da die Glieder der Gleichungen auf gleiche Abmessungen steigen. Da nun die Gleichung für eine gerade Linie allein eine Abmessung haben kan / so nennet man eine Linie von dem ersten Geschlechte / wenn die Glieder der Gleichung zwey Abmessungen haben: sind derselben drey / so ist es eine Linie von dem anderen Geschlechte: sind ihrer viere: eine Linie von dem dritten Geschlechte u. s. w.

Anmerckung.

209. Die Gleichung für den Circul ist $y^2 = ax - x^2$ / oder auch $a^2 - x^2 = y^2$. Demnach ist der Circul eine Linie von dem ersten Geschlechte. Wiederum wenn $ax = y^2$ die Natur einer krummen Linie erkläret; so ist dieselbe abermahl eine von dem ersten

Geschlechte. Hingegen wenn die Erklärung der krummen Linie $a^2x = y^3$ ist/ so ist sie eine Linie von dem anderen Geschlechte.

Die 20. Erklärung.

210. Die algebraischen Linien rechnen wir zu einer Familie, in deren Gleichungen alle Glieder bis auf die Exponenten der Dignitäten mit einander übereinkommen.

Die 1. Anmerckung.

211. Demnach gehören die krummen Linien / deren Natur durch die Gleichungen $ax = y^2$, $a^2x = y^3$, $a^3x = y^4$ erkläret wird/ zu einer Familie.

Zusatz.

212. Die krummen Linien können alle unter eine Gleichung gebracht werden, die zu einer Familie gehören, weun man nemlich für die determinirte Exponenten undeterminirte setzet.

Die 2. Anmerckung.

213. Solchergestalt sind alle krumme Linien/ die sich durch $ax = y^2$, $a^2x = y^3$, $a^3x = y^4$ u. s. w. erklären lassen/ unter dieser Gleichung enthalten $a^{m-1}x = y^m$ oder/ wenn $a = 1$ angenommen wird $x = y^m$.

Die 3. Anmerckung.

214. Solchergestalt könnet ihr alle algebraische Linien für eine grosse Familie rechnen/ die aus unendlich kleineren bestehet/ deren jede unendliche Geschlechter hat. Denn weil in allen Gleichungen / dadurch die Natur der krummen Linien erkläret wird / entweder eine gewisse Dignität der Abscisse und Ordinate bloß durch bekandte Grössen / oder zugleich verschiedene Dignitäten derselben in einander / oder auch für einige Glieder lauter bekandte Grössen in einander multipliciret werden/

werden / alle Gleichungen aber sich auf o solviren / wenn man alle Glieder auf eine Seite setzet (als an stat $ax = y^2$ könnet ihr sagen $y^2 - ax = 0$); so wird eine General-Gleichung für alle algebraische Linien seyn $ay^m + bx^n + cy^r x^s + df = o$. Man setzet überall das Zeichen + / weil die Zeichen auf gar viel Arten verändert werden können.

Die 4. Anmerckung.

215. Diese Eintheilung der Linien in ihre Geschlechter und Familien hat ihren Nutzen: und dienet die letztere sonderlich dazu / daß wir dasjenige / was vielen Linien gemein ist / auf einmahl erkennen. Die erstere Eintheilung ist zu dem Ende aufgebracht worden / daß man eine Wahl der Linien anstellen könte / wenn man einige zu Auflösung einer Aufgabe aussuchen sol: wovon ich an seinem Orte reden wil.

Die 5. Anmerckung.

216. Unter den krummen Linien sind sonderlich diejenigen fur andern berühmt / welche aus geschickter Zerschneidung eines Kegels oder Coni entstehen / und daher von den Alten *Sectiones Conicæ*, oder Kegelschnitte genennet worden. Denn weil sie die Alten nebst dem Circul allein in die Geometrie nahmen; haben sie auch viel von ihren Eigenschaften geschrieben / und die neueren haben noch ein mehreres dazu gefunden. Derowegen wollen auch wir ihre vornehmste Eigenschaften durch algebraische Rechnungen untersuchen / und zu dem Ende für ihre Erklärungen algebraische Gleichungen annehmen. Es sind aber dieser Linien drey / nemlich die *Parabola*, die *Ellipsis* und die *Hyperbola*. Merckt hier einmahl für allemahl / daß wir beständig die Abscisse x und die halbe Ordinate y nennen wollen.

Die 21. Erklärung.

217. Die *PARABOLA* ist eine krumme Linie, in welcher $ax = y^2$, das ist / in welcher das Quadrat der halben Ordinate dem Rectangulo aus der Abscisse in eine beständige Linie gleich ist / die der Parameter genennet wird.

Der

Der 1. Zusatz.

218. Derowegen ist in der Parabel $a = y^2 : x$, das ist, der Parameter ist die dritte Proportional-Linie zu einer jeden Abscisse und der ihr zugehörigen halben Ordinate.

Der 2. Zusatz.

219. Es ist ferner $\sqrt{ax} = y$, das ist, die halbe Ordinate ist die mittlere Proportional-Linie zwischen dem Parameter und der ihr zugehörigen Abscisse.

Der 3. Zusatz.

220. Solchergestalt könnet ihr eine Parabel beschreiben, wenn deren Parameter gegeben wird. Traget nemlich auf die Linie AX den Parameter LA und ziehet durch A die Linie CD auf AX perpendicular. Beschreibet nach Gefallen Circul, die einander in B berühren, und die Linie BX in P, die Linie CD in 1. 2. 3. 4. 5 durchschneiden. Durch P ziehet Linien I. I, II. II, III. III, u. s. w. mit CD parallel und lasset darauf aus 1. 2. 3. u. s. w. perpendicular Linien 1. I, 2. II, 3. III. u. s. w herunter fallen, oder welches gleichviel ist, machet P I = A 1, P II = A 2, P III = A 3 u. s. w; so sind die Puncte I, II, III u. s. w, in der Parabel. Denn es sey AB = a, AP = x, A 3 = P III = y; so ist $y^2 = ax$ (§. 210. *Geom.*) und also der Punct III in der Parabel (§. 217).

Tab. II. Fig. 21.

Der

Der 4. Zusatz.

221. Ihr könnet auch in einer jeden Parabel einen verlangten Punct geometrisch determiniren Z. E. Ihr wolltet wissen, ob M recht in der Parabel sey. Lasset aus M in P ein Perpendicul fallen, und traget aus P in B den Parameter. Werffet über BA einen halben Circul, wenn er durch den Punct M gehet, so ist er in der Parabel (§. 210. *Geom.* & §. 217. *Algebr.*). Tab. III. Fig. 22.

Der 5. Zusatz.

222. Endlich ist $x = y^2 : a$, das ist, die Abscisse ist die dritte Proportional-Linie zu dem Parameter und der halben Ordinate. Daher wenn AB der Parameter ist und BAQN ein Rectangulum; wenn man ferner NM mit BP parallel ziehet und auf AN die Linie AM perpendicular aufrichtet; so ist der Punct M in der Parabel. Denn in dem bey A rechtwincklichten Triangel NAM ist NQ : QA = QA : QM das ist, AB : PM = PM : AP, oder $a : y = y : x$. Tab. III. Fig. 23.

Der 6. Zusatz.

223. Die erklärte Parabel (welche man die Apollinische zu nennen pfleget, weil Apollonius Pergæus unter den Alten gründlich von ihr geschrieben) ist eine Linie von dem ersten Geschlechte (§. 208).

Der 7. Zusatz.

224. Wenn ihr demnach $a^2x = y^3$, $a^3x = y^4$, $a^4x = y^5$ &c. setzet, so habet ihr Parabeln von dem anderen, dritten, vierdten &c. Geschlechte. Und daher erkläret $a^{m-1}x = y^m$ eine gantze Familie unendlicher Geschlechter der Parabeln. Gleicher Gestalt wenn ihr $ax^2 = y^3$, $ax^3 = y^4$, $ax^4 = y^5$ &c. setzet; so habet ihr noch andere Arten der Parabeln von dem anderen, dritten, vierdten &c. Geschlechte, welche alle unter der Gleichung $ax^{m-1} = y^m$ enthalten sind. Beyde Familien gehören unter diese Gleichung nebst unendlich anderen Linien $a^nx^m = y^{n+m}$.

Der 8. Zusatz.

Tab.III. Fig.23.

225. Wenn ihr auf die Sehne AM der Parabel von dem ersten Geschlechte ein Perpendicul AR aufrichtet, welches die Semiordinate PM, wenn sie verlängert wird, in R durchschneidet; so ist der Punct R in der Parabel von dem anderen Geschlechte. Denn wegen des rechten Winckels bey A ist PM : AP = AP : PR (§. 210 *Geom.*) und daher $PM^2 : AP^2 = AP^2 : PR^2$, oder $PM^2 : SR^2 = SR^2 : AS^2$ (§. 142). Wenn ihr demnach AB = a, AP = SR = y und PR = SA = x setzet; so habet ihr $ay : y^2 = y^2 : x^2$, folgends $y^3 = ax^2$.

Die 1. Anmerckung.

226. Auf gleiche Weise wird vermittelst der Parabel von dem anderen Geschlechte die von dem dritten und so

so weiter unendlich fort gefunden / wie ich in den Actis Eruditorum des 1717ten Jahres gezeiget.

Der 9. Zusatz.

227. Wenn ihr AS dem Parameter gleich machet, und RS in S perpendicular aufrichtet, dann aus S in R die halbe Ordinate QM traget und endlich aus A durch R die Linie AN ziehet; so ist N ein Punct in der Parabel von dem anderen Geschlechte, in welcher $y^3 = a^2x$. Denn es sey $AQ = y$, $AS = a$; so ist $QM = SR = y^2 : a$, folgends da $AS : SR = AQ : QN$, das ist, $a : \frac{y^2}{a} = y : x$; so findet ihr $a^2x = y^3$, oder $a^2 . QN = AQ^3$. Tab. III. Fig. 24.

Die 2. Anmerckung.

228. Auf gleiche Weise wird vermittelst der Parabel von dem anderen Geschlechte die von dem dritten und so weiter unendlich fort gefunden/wie ich gleichfals in den Actis Eruditorum A. 1717. gezeiget.

Die 22. Erklärung.

229. Der Brenn-Punct (Focus) ist der Punct in der Axe, wo der Parameter die Ordinate abgiebet.

Die 82. Aufgabe.

230. Die Weite des Brenn-Punctes F von der Scheitel A zu finden. Tab. III. Fig. 25.

Auflösung.

Es sey $AF = x$, der Parameter $= a$, so ist $FR = \frac{1}{2}a$ (§. 229), folgends

$\frac{1}{4}a^2$

$$\frac{1}{4}a^2 = ax$$

$$\frac{1}{4}a = x$$

Tab. III. Fig. 25. In der Parabel ist die Weite des Brenn-Punctes F von der Scheitel A dem vierdten Theile des Parameters gleich.

Die 83. Aufgabe.

231. Die Verhältnis zu finden, welche die Ordinaten gegen einander haben.

Auflösung.

Tab III. Fig 22. Es sey der Parameter $= a$, $AP = x$, $Ap = v$, $PM = y$, $pm = z$, so ist $y^2 = ax$, und $z^2 = av$ (§. 217), folgends $y^2 : z^2 = ax : av = x : v$ (§. 144). Demnach ist $PM^2 : pm^2 = AP : Ap$, das ist,

In der Parabel verhalten sich die Quadrate der Ordinaten wie die Abscissen.

Die 84. Aufgabe.

232. Die Grösse des Rectanguli aus der Summe zweyer halben Ordinaten $PM + pm$ in ihre Differentz Rm zu finden.

Auflösung.

$$\left.\begin{aligned} pm + PM &= \sqrt{av} + \sqrt{ax} \\ mR &= \sqrt{av} - \sqrt{ax} \end{aligned}\right\} \text{ §. 219.}$$

$$(pm + Pm)\,mR = av - ax = a(v - x)$$

Das

Das Rectangulum aus der Summe zweyer halben Ordinaten in ihre Differentz ist gleich dem Rectangulo aus dem Parameter in die Differentz der zugehörigen Abscissen.

Zusatz.

233. Derowegen verhält sich der Parameter zu der Summe zweyer halben Ordinaten, wie ihre Differentz zu der Differentz der Abscissen.

Die 85. Aufgabe.

234. Die Verhältnis der Sehnen AM und Am zu finden, welche aus der Scheitel der Parabel A gegen das Ende der Ordinaten gezogen werden. Tab. III. Fig. 22.

Auflösung.

Weil $PM^2 = ax$, $AP^2 = x^2$; so ist $AM^2 = ax + x^2$ (§. 172. *Geom.*). Wiederum wenn ihr $AP = v$ setzet; so ist $AM^2 = av + v^2$. Derowegen

$$AM^2 : Am^2 = ax + x^2 : av + v^2$$
$$= (a + x)x : (a + v)v$$

Die Quadrate der Sehnen AM und Am verhalten sich in der Parabel wie die Rectangula aus den Abscissen in die Aggregate der Abscissen und des Parameters.

Die 86. Aufgabe.

235. Die Grösse der Linie FM zu finden (*Wolfs Mathes. T. IV.*) Mmmmm den Tab. III. Fig. 25.

den, die aus dem Brenn-Puncte an das Ende einer Ordinate M gezogen wird.

Auflösung.

Es sey der Parameter $= a$, $AP = x$, so ist $AF = \frac{1}{4}a$ (§. 230), $PF = x - \frac{1}{4}a$, folgends

$$PF^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$$
$$PM^2 = ax \quad \text{(§. 217)}$$

$$FM^2 = x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2 \quad \text{(§. 172. Geom.)}$$

$$FM = x + \frac{1}{4}a$$

Die gerade Linie FM, welche aus dem Brenn-Puncte F einer Parabel gegen das Ende ihrer Ordinate M gezogen wird, ist gleich der Summe aus der Abscisse und der Weite des Brenn-Punctes von der Scheitel.

Der 1. Zusatz.

Tab. III. Fig. 25.

236. Wenn ihr den vierdten Theil des Parameters aus A in F und in f traget, durch AX so viel Parallel-Linien MM ziehet, als euch gefället und aus F mit der Weite Pf die Puncte M beyderseits abschneidet; so könnet ihr abermahls eine Parabel beschreiben.

Der 2. Zusatz.

Tab. III. Fig. 26.

237. Ihr könnet auch dieses durch Bewegung verrichten. Denn nehmet wie vorhin auf der Axe $Af = AF = \frac{1}{4}a$. Befestiget in f ein

Lineal DC dergestalt, daß es in f mit fX einen rechten Winckel machet. Nehmet ein Winckel Maaß IGH und befestiget an seinem einen Ende H einen Faden, der ihm gleich ist; das andere Ende aber des Fadens bindet an einen Nagel, den ihr im Brenn-Puncte F eingeschlagen. Wenn ihr einen Stift an das Winckel-Maaß IGH haltet und es an dem Lineale DC verschiebet; so wird sich die Parabel beschreiben. Denn es ist beständig $FM = AP + Af = x + \frac{1}{4}a$ und daher M ein Punct in der Parabel (§. 235).

Anmerckung.

238. Auf ebenmäßige Art könnet ihr die Eigenschaften der Parabeln von höheren Geschlechtern untersuchen. Wolt ihr aber diejenigen haben, welche allen Parabeln gemein sind, so dörffet ihr nur die allgemeine Gleichung für ihre gantze Familie annehmen. Denn weil $a^{m-1}x = y^m$, so ist auch $a^{m-1}v = z^m$, folgends $PM^m \ddagger pm^m = AP : Ap$. Wiederum weil $PM + pm = \sqrt[m]{V}$ $a^{m-1}x + \sqrt[m]{V}a^{m-1}v$, $mR = \sqrt[m]{V}a^{m-1}v - \sqrt[m]{V}a^{m-1}x$; so ist $(PM+pm).mR = \sqrt[m]{V}a^{2m-2}v^2 - \sqrt[m]{V}a^{2m-2}x^2$. Weil $FR = \frac{1}{2}a$; so ist $a^m : 2^m = a^{m-1}x$, folgends $x = a \ddagger 2^m = AF$. Derowegen kommet in den Parabeln von dem höheren Geschlechte der Brenn-Puncte dem Scheitel-Puncte immer näher/wenn sie einen Parameter haben. Tab. III. Fig. 22. Tab. III. Fig. 25.

Die 23. Erklärung.

239. Die *ELLIPSIS* ist eine krumme Linie, in welcher sich verhält das Rectangulum Tab. III. Fig. 27.

aus den Theilen der Axe AP und PB, zu dem Quadrate ihrer halben Ordinate PM wie die Axe AB zu einer unveränderlichen Linie, die ihr Parameter genennet wird: das ist, wenn ihr $AB = a$, den Parameter $= b$, $PM = y$ und $AP = x$ setzet, in welcher $ay^2 = abx - bx^2$.

Der 1. Zusatz.

240. Derowegen ist $y^2 = bx - bx^2 : a$, das ist, das Quadrat der halben Ordinate ist gleich einem Rectangulo aus der Abscisse in den Parameter, weniger ein Rectangulum aus eben dieser Abscisse in die vierdte Proportional-Linie zu der Axe, dem Parameter und der Abscisse.

Der 2. Zusatz.

241. Weil $ay^2 = abx - bx^2$, so ist

$$bx^2 : (bx - y^2) = a$$

Demnach könnet ihr in einer Ellipsi aus dem gegebenen Parameter der Abscisse und halben Ordinate die Axe folgender gestalt finden. Suchet zu $PE = b$, $PM = PF = y$ die dritte Proportional-Linie $PG = y^2 : b$. Machet $AP = x$ und $PH = PG$; so ist $AH = x - y^2 : b = (bx - y^2) : b$. Machet ferner $AI = AH$ und $AL = AP = x$, und ziehet LB mit IP parallel, so ist $AB = a$, oder die verlangte Axe.

Tab. III. Fig. 28.

Der

Der 3. Zusatz.

242. Wiederum weil $ayy = abx - bxx$, so ist $b = ayy : (ax - x^2)$, und daher könnet ihr in einer gegebenen Ellipsi den Parameter also finden. Richtet in B die Perpendicular-Linie BE auf und ziehet aus A durch M die Linie AE, so ist $BE = ay : x$ (§. 184. *Geom.*). Machet $BG = PM$, und ziehet die Linie PE, und mit ihr GH parallel; so ist $BH = ay^2 : (ax - x^2) = b$ (§. cit.), das ist, der verlangte Parameter. Tab.III. Fig.29.

Der 4. Zusatz.

243. Weil $yy = (abx - bxx) : a$, so ist $y = \sqrt{(bx - bxx : a)}$. Derowegen wenn euch die Axe und der Parameter gegeben werden, könnet ihr für jede Abscisse ihre gehörige halbe Ordinate folgender gestalt finden. Suchet zu der Axe $AB = a$ dem Parameter $BC = b$ und der Abscisse $AP = x$ die vierdte Proportional-Linie $FD = bx : a$. Ziehet DE mit AB parallel; so ist $CE = bx : a$. Machet $PF = CE$ und beschreibet über AF einen halben Circul; so ist $PM = \sqrt{(bx - bx^2 : a)} = y$, das ist, die verlangte halbe Ordinate. Tab.III. Fig.30.

Die 87. Aufgabe.

244 Die Weite des Brenn-Punctes AF von der Scheitel A zu finden.

Auflösung.

Tab.III. Es sey AB $= a$, der Parameter $= b$, AF
Fig.27. $= x$, so ist FR $= \frac{1}{2} b$ ((§.229), und

$$\tfrac{1}{4} ab^2 = abx - bxx \text{ (§. 240).}$$

$$x^2 - ax = -\tfrac{1}{4} ab$$

$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4} a^2 = \tfrac{1}{4} a^2 - \tfrac{1}{4} ab$$

$$\tfrac{1}{2} a - x = \sqrt{(\tfrac{1}{4} a^2 - \tfrac{1}{4} ab)}$$

$$\tfrac{1}{2} a - \sqrt{(\tfrac{1}{4} a^2 - \tfrac{1}{4} ab)} = x$$

Traget aus B in E $\frac{1}{2} b$; so ist CE $= \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} b$. Beschreibet über AE einen halben Circul, welcher die in dem Mittelpuncte C aufgerichtete Perpendicular-Linie CD in G durchschneidet; so ist GC $= \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} ab)}$. Machet C F $=$ GC; so ist in F der Brenn-Puncte.

Zusatz.

245. Also ist die Weite des Brenn-Punctes von dem Mittelpuncte C $= \sqrt{(\frac{1}{4} aa - \frac{1}{4} ab)}$, das ist die mittlere Proportional-Linie zwischen $\frac{1}{2} a$ und $\frac{1}{2} a - \frac{1}{2} b$.

Die 24. Erklärung.

Tab.III. 246. Die Perpendicular-Linie DC, wel-
Fig.27. che die grössere Axe AB in zwey gleiche Theile theilet, ist die halbe kleine Axe.

Die

Die 88. Aufgabe.

247. Aus dem gegebenen Parameter und der grossen Axe AB die kleine Axe CD zu finden. Tab. III. Fig. 27.

Auflösung.

Es sey der Parameter $= b$, $AB = a$, $CD = \frac{1}{2}z$, so ist

$$\frac{1}{4}a^2 : \frac{1}{4}z^2 = a : b \text{ (§. 239).}$$

$$z^2 = ab$$

$$z = \sqrt{ab}$$

das ist:

Die kleine Axe in der Ellipsi ist die mittelere Proportional-Linie zwischen der grossen und dem Parameter.

Der 1. Zusatz.

248. Derowegen ist der Parameter die dritte Proportional-Linie zu der grossen und kleinen Axe.

Der 2. Zusatz.

249. Wenn die Weite des Brenn-Punctes von der Scheitel $AF = x$ ist; so ist $ax - xx = \frac{1}{4}ab$ (§. 244). Derowegen ist das Rectangulum aus der Weite des Brenn-Punctes von der Scheitel AF in ihr Complement zur grossen Axe FB dem Rectangu- Tab. III. Fig. 27.

lo aus der grossen Axe in den vierdten Theil des Parameters gleich.

Die 89. Aufgabe.

Tab. III. Fig. 27.

250. Die Verhältnis zu finden, welche die halben Ordinaten PM und pm in der Ellipsi gegen einander haben.

Auflösung.

Es sey AB $= a$, der Parameter $= b$, AP $= x$, PM $= y$, Ap $= z$, pm $= v$, so ist

$$\left.\begin{aligned} yy &= bx - bx^2 : a \\ v^2 &= bz - bz^2 : a \end{aligned}\right\} (\S.240)$$

Derowegen ist $y^2 : v^2 = abx - bx^2 : abz - bz^2 = ax - x^2 : az - z^2 = (a - x)x : (a - z)z$, das ist, $PM^2 : pm^2 = PB.AP : pB.Ap$, nemlich

In der Ellipsi verhalten sich die Quadrate der halben Ordinaten wie die Rectangula aus den Theilen der Axe.

Der 1. Zusatz.

251. Derowegen sind auch $DC^2 : PM^2 = CB^2 : AP.PB$, folgends $DC^2 : CB^2 = PM^2 : AP.PB$ (§. 142), das ist, das Quadrat der halben kleinen Axe verhält sich zum Quadrate der halben grossen, wie das Quadrat der halben Ordinate zu dem Rectangulo aus den Theilen der Axe.

Der

Der 2. Zusatz.

252. Setzet demnach CP $= x$, so ist AP $=$ $\frac{1}{2}a - x$, PB $= \frac{1}{2}a + x$, folgends $\frac{1}{4}ab : \frac{1}{4}a^2 = y^2 : \frac{1}{4}a^2 - x^2$. Derowegen ist Tab. III. Fig. 27.

$$ay^2 = \tfrac{1}{4}a^2b - bx^2$$

$$y^2 = \tfrac{1}{4}ab - bx^2 : a$$

Der 3. Zusatz.

253. Es sey CD $= d$, AC $= r$, PC $= x$; so ist AP $= r - x$ und PB $= r + x$, folgends AP. PB $= r^2 - x^2 =$ AC^2 $-$ PC^2, und daher

$$d^2 : r^2 = y^2 : r^2 - x^2$$

$$y^2 = d^2(r^2 - x^2) : r^2$$

Also habet ihr noch eine andere Gleichung, welche die Natur der Ellipsis erkläret.

Die 90. Aufgabe.

254. Die Grösse der Linie zu determiniren, welche aus dem Brenn-Puncte an das Ende D der kleinen Axe gezogen wird. Tab. III. Fig. 27.

Auflösung.

Es sey der Parameter $= b$, AB $= a$, so ist fC^2 $= \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}ab$ (§. 245) und DC^2 $= \frac{1}{4}ab$ (§. 247), folgends fD^2 $= \frac{1}{4}a^2$ (§ 172. *Geom.*). Dannenhero fD $= \frac{1}{2}a =$ CB.

Zusatz.

255. Wenn euch die kleine und grosse Axe

gegeben werden, könnet ihr die Brenn-Puncte F und f gar leicht finden. Denn theilet
Tab. III. Fig. 27. die grosse Axe AB in zwey gleiche Theile in C, und richtet aus C die halbe kleine Axe CD perpendicular auf, so könnet ihr aus D mit der halben grossen Axe CB die Brenn-Puncte F und f determiniren.

Die 91. Aufgabe.

Tab. III. Fig. 31.

256. Die Grösse der geraden Linien FM und fM zu finden, welche aus beyden Brenn-Puncten F und f an das Ende M einer Semiordinate PM gezogen werden.

Auflösung.

Es sey alles wie vorhin, nur $FC = fC = c$; so ist $PC = \frac{1}{2}a - x$, $Pf = c + \frac{1}{2}a - x$, $PF = c - \frac{1}{2}a + x$, $PF^2 = cc - ac + 2cx + \frac{1}{4}aa - ax + xx$, $Pf^2 = cc + ac - 2cx + \frac{1}{4}aa - ax + xx$. Nun ist (§. 251).

$$BC^2 : DC^2 = AP \cdot PB : PM^2$$

Das ist, $\frac{1}{4}a^2 : \frac{1}{4}a^2 - c^2 = ax - x^2 : PM^2$

$$1 : 1 - \frac{4c^2}{a^2} = ax - x^2 : PM^2$$

Solchergestalt ist

$$PM^2 = ax - xx - 4ccx : a + 4ccxx : aa$$

$$PF^2 = cc - ac + 2cx + \tfrac{1}{4}aa - ax + xx$$

$$FM^2 = cc - ac + 2cx + \tfrac{1}{4}a^2 - 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$

$$FM = \tfrac{1}{2}a - c + 2cx : a$$

Wie

Wiederum.

$PM^2 = ax - xx - 4ccx : a + 4ccxx : aa$
$Pf^2 = cc + ac - 2cx + \frac{1}{4}aa - ax + xx$

$fM^2 = c^2 + ac - 2cx + \frac{1}{4}a^2 - 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2.$

$fM = \frac{1}{2}a + c - 2cx : a$
$FM = \frac{1}{2}a - c + 2cx : a$

$fM + FM = a = AB$, nemlich

In der Ellipsi sind die beyden Linien fM und FM, welche aus den Brenn-Puncten F und f an einen Punct M in der Peripherie gezogen werden, zusammen genommen der grossen Axe AB gleich.

Zusatz.

257. Daher könnet ihr gar leicht aus der gegebenen grossen und kleinen Axe die Ellipsin beschreiben. Denn suchet die Brenn-Puncte F und f, und schlaget in ihnen zwey Nägel ein. Bindet an die Nägel einen Faden FMf, der so lang ist als die grosse Axe AB. Dehnet den Faden mit einem Stifte aus, und führet den Stift an dem Faden herum, so wird die Ellipsis beschrieben. Tab. III. Fig. 31.

Anmerckung.

258. Ausser der Ellipsi des Apollonii, welche von dem ersten Geschlechte ist, könnet ihr noch unzehlich viel andere von höheren Geschlechtern erdencken, welche unter der allgemeinen Gleichung begriffen werden: $ay^m \pm x^n = bx^m$.

$bx^m (a-x)^n$. Es ist nemlich in allen wie der Parameter zu der grossen Axe/ also die Dignität der halben Ordinate/ deren Exponente den Exponenten der Dignitäten von den Theilen der Axe zusammen gleich ist/ zu dem Product aus diesen Dignitäten. Z. E. In der Ellipsi von dem anderen Geschlechte ist $b:a = y^3 : x^2(a-x)$; in der Ellipsi von dem vierdten Geschlechte $b:a = y^4 : x^2(a-x)^2$.

Die 2. Anmerckung.

259. Wenn die grosse Axe der kleinen gleich wird / so wird aus der Ellipsi ein Circul. Denn alsdenn ist $\frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}a^2$ (§. 247) und daher $b = a$, folgends an stat $ay^2 = abx - bx^2$ bekommet ihr $ay^2 = ax^2 - ax^2$ das ist/ $y^2 = ax - xx$, welche Gleichung den Circul erkläret. Wie man nun aber Ellipses von höheren Geschlechtern hat/ also giebt es auch Circul von höheren Geschlechtern/ wenn ihr nemlich setzet $AP^m : PM^m = PM : PB$, das ist/ $x^m : y^m = y : a-x$. Also ist die Gleichung für unendliche Circul $ax^m - x^{m+1} = y^{m+1}$.

Tab. II. Fig. 19.

Z. E. Wenn $m = 1$, so ist $ax - x^2 = y^2$ für den Circul des ersten Geschlechtes; ist $m = 4$, so ist $ax^4 - x^5 = y^5$ die Gleichung für den Circul von dem vierdten Geschlechte.

Die 25. Erklärung.

260. Die Hyperbel ist eine krumme Linie, in welcher $ay^2 = abx + bxx$, das ist, wie eine unveränderliche Linie b, welche der Parameter heisset, zu einer anderen unveränderlichen Linie a, welche die Zwerch-Axe (Axis transversus) genennet wird, so das Qvadrat der Semiordinate y^2 zu dem Rect-

Rectangulo aus der Summe der Abscisse und Zwerch-Axe $a+x$ in die Abscisse x.

Zusatz.

261. Derowegen ist $y^2 = bx + bx^2 : a$, $b = ay^2 : (ax + xx)$, $a = bx^2 : y^2 - bx$ u. s. w. wie in der Ellipsi, nur daß ihr das Zeichen + an stat des Zeichens − habet.

Die 26. Erklärung.

262. Weil die Gleichung der Hyperbel mit der Gleichung für die Ellipsin übereinkommet, nur daß sie bloß in dem einen Zeichen von ihr unterschieden ist; so nennet man auch hier die mittlere Proportional-Linie zwischen der Zwerch-Axe und dem Parameter die kleine Axe.

Die 27. Erklärung.

263 Wenn ihr die Axe der Hyperbel AX über ihre Scheitel A verlängert, und AB der Zwerch-Axe gleich machet, so heisset der Punct C, durch welchen AB in zwey gleiche Theile getheilet wird, der Mittelpunct. Tab. IV. Fig. 32.

Die 92. Aufgabe.

264. Aus dem gegebenen Parameter und der Zwerch-Axe AB die weite des Brenn-Punctes F von der Scheitel A zu finden. Tab. IV. Fig. 32

Auflösung.

Es sey der Parameter $= b$, $AB = a$; so ist $FR = \frac{1}{2}b$ (§. 229) und (§. 260).

$$b : a = \tfrac{1}{4}bb : ax + xx$$

$$\tfrac{1}{4}abb = abx + bxx$$

$$\tfrac{1}{4}ab = ax + xx \quad \text{-b}$$

$$\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}ab = \tfrac{1}{4}aa + ax + xx$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}ab)} = \tfrac{1}{2}a + x$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}ab)} - \tfrac{1}{2}a = x$$

Tab. IV. Fig. 32. Machet $BE = \frac{1}{2}b$, so ist $EC = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$. Richtet in C einen Perpendicul auf und beschreibet über EA einen halben Circul; so ist $CG = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab)}$. Machet $CF = CG$; so ist in F der Brenn-Punct.

Der 1. Zusatz.

265. Also ist die Weite des Brenn-Punctes von dem Mittelpuncte $FC = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ab)}$.

Der 2. Zusatz.

266. Weil $ax + xx = \frac{1}{4}ab$, und $ax + xx = AF.FB$, hingegen $\frac{1}{4}ab$ das Quadrat der halben kleinen Axe CD (§. 262); so ist $AF.FB = CD^2$.

Die 93. Aufgabe.

Tab. IV. Fig. 32. 267. Die Verhältnis zu finden, welche die Semiordinaten PM und pm gegen einander haben.

Auf-

Auflösung.

Es sey die Zwerch-Axe $AB = a$, der Parameter $= b$, $AP = x$, $PM = y$, $Ap = v$, $pm = z$, so ist $y^2 : z^2 = (bx + bxx : a) : (bv + bv^2 : a) = ax + xx : av + vv = (a+x)x : (a+v)v$ das ist, $PM^2 : pm^2 = PB.AP : pB.Ap$, nemlich

Die Quadrate der Semiordinaten verhalten sich wie die Rectangula aus den Abscissen und der Zwerch-Axe in die Abscissen.

Die 94. Aufgabe.

268. Die Verhältnis zu finden, welche das Quadrat der Zwerch-Axe zu dem Quadrate der kleinen Axe hat.

Auflösung.

Das Quadrat der Zwerch-Axe ist aa, der kleinen Axe aber ab (§. 262). Also verhält sich jenes zu diesem wie aa zu ab, das ist, wie a zu b (§. 144), oder wie die Zwerch-Axe zu dem Parameter.

Zusatz.

269. Weil $b : a = PM^2 : AP.PB$, (§. 260); so ist auch das Quadrat der kleinen Axe zu dem Quadrate der Zwerch-Axe wie das Quadrat der Semiordinate zu dem Rectangulo aus der Abscisse in die Summe aus der Abscisse und der Zwerch-Axe. Tab. IV. Fig. 32.

Die

Die 95. Aufgabe.

Tab. III. Fig. 33. 270. Es seyn zwey Hyperbeln von gleicher Grösse, die also einen Parameter, eine Zwerch-Axe und eine kleine Axe haben, einander entgegen gesetzet in der Weite ihrer Zwerch-Axe AB. Ziehet aus beyder Brenn-Puncte f und F gegen einen Punct einer Hyperbel M zwey gerade Linien fM und FM. Ihr sollet ihre Grösse finden.

Auflösung.

Es sey alles wie vorhin, nur $FC = fC = c$; so ist $AF = c - \frac{1}{2}a$, $Af = c + \frac{1}{2}a$, $PF = x - c + \frac{1}{2}a$, $Pf = c + \frac{1}{2}a + x$, $PF^2 = xx - 2cx + cc + ax - ac + \frac{1}{4}aa$, $Pf^2 = cc + ac + \frac{1}{4}aa + 2cx + ax + xx$. Nun ist (§. 266) $CD^2 = cc - \frac{1}{4}aa$ und (§. 268. 269) $AC^2 : CD^2 = AP. PB : PM^2$ das ist, $\frac{1}{4}aa : cc - \frac{1}{4}aa = ax + xx : PM^2$ folgends $1 : 4cc - 1 = ax + x^2 : PM^2$

$$\overline{a^2}$$

Demnach ist

$PM^2 = -ax - xx + 4c^2x : a + 4ccxx : a^2$

$PF^2 = xx - 2cx + cc + ax - ac + \frac{1}{4}aa$

$FM^2 = cc - 2cx - ac + \frac{1}{4}aa + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$

$FM = c - \frac{1}{2}a + 2cx : a$

Wiederum

$PM^2 = -ax - x^2 + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$

$Pf^2 = cc + ac + \frac{1}{4}aa + 2cx + ax + xx$

$fM^2 = cc + ac + \frac{1}{4}a^2 + 2cx + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$

fM

$fM = c + \frac{1}{2}a + 2cx : a$

$FM = c - \frac{1}{2}a + 2cx : a$

$fM - FM = a =$ AB.

Zusatz.

271. Hieraus fliesset folgende Manier die Hyperbel zu beschreiben. Auf eine gerade Linie ZX traget die Zwerch-Axe AB und aus A in F, ingleichen aus B in f die Weite des Brenn-Puncts von der Scheitel (§. 264). Schlaget in F und f Nägel ein. Bindet an den Nagel F einen Faden FMC und mit seinem anderen Ende an das eine Ende eines Lineals fC, welches um die Zwerch-Axe AB länger als der Faden ist. Hänget das Lineal mit dem anderen Ende an den Nagel in f. Drücket den Faden mit einem Stiffte an das Lineal und schiebet es fort, so wird er die Hyperbel beschreiben. Tab. IV. Fig. 33.

Anders.

Traget auf eine gerade Linie die Zwerch-Axe AB und ferner aus B in f und aus A in F die Weite des Brenn-Puncts von der Scheitel (§. 264). Ziehet aus f nach Gefallen die Linie fVII und traget aus f in L die Länge der Zwerch-Axe BA. Beschreibet aus f mit beliebiger Eröffnung des Circuls die Bogen 1. 1, 2. 2, 3. 3, u. s. w. und durchschneidet sie aus F Tab. IV. Fig. 32.

mit LI, LII, LIII u. s. w. in 1. 2. 3. u. s. w. so sind die Puncte 1. 2. 3. ꝛc. in der Hyperbel.

Die 28. Erklärung.

Tab. IV. Fig. 34.

272. Wenn ihr die kleine Axe DE an die Scheitel der Hyperbel A rechtwincklicht gesetzet und aus dem Mittelpuncte C durch ihre beyden Ende D und E die geraden Linien CR und Cr ziehet; so werden dieselben die Asymptoten genennet.

Der 1. Zusatz.

273. Weil CA : AE = CP : Pr und CA : DA (= AE) = CP : PR (§. 184. *Geom.*); so ist PR = Pr (§. 71. *Arithm.*), folgends, da PM = Pm, auch MR = mr (§. 31. *Arithm.*).

Der 2. Zusatz.

274. Wenn AI mit CR parallel gezogen wird; so ist EA : ED = AI : DC §. 184 *Geom.*), folgends da EA = $\frac{1}{2}$ED (§. 272), auch AI = $\frac{1}{2}$ DC = $\frac{1}{2}$CE. Weil nun ferner EA : ED = EI : EC (§. 184. *Geom.*) und daher, weil EA = $\frac{1}{2}$ ED, auch EI = $\frac{1}{2}$CE = CI; so ist auch AI = CI (§. 28. *Arithm.*).

Die 29. Erklärung.

275. Das Quadrat der Linie AI oder CI wird die Potenz der Hyperbel genennet.

Die

Die 96 Aufgabe.

276. Die Grösse der Potenz der Hyperbel zu finden.

Auflösung.

Es sey $CA = \frac{1}{2}a$, $AE = \frac{1}{2}c$; so ist $CE = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2)}$ (§. 172. *Geom.*), und daher $CI = \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2)}$, folgends $CI^2 = (a^2 + c^2) : 16$, nemlich die Potenz der Hyperbel ist dem vierdten Theil der Quadrate der beyden halben Axen gleich. Tab. IV. Fig. 34.

Die 97. Aufgabe.

277. Den Unterscheid zwischen den Quadraten PM und PR zu finden. Tab. IV. Fig. 34.

Auflösung.

Weil $CA : DA = CP : PR$ (§. 184. *Geom.*) und $DA = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$ (§. 262), $CP = \frac{1}{2}a + x$, so findet ihr $PR = (\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{4}ab} + x\sqrt{\frac{1}{4}ab}) : \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}ab} + 2x\sqrt{\frac{1}{4}ab} : a$. Derowegen ist

$$PR^2 = \frac{1}{4}ab + bx + bxx : a$$
$$PM^2 = \quad\quad bx + bxx : a \quad (\text{§. } 260).$$

$$PR^2 - PM^2 = \frac{1}{4}ab = DA^2.$$

Zusatz.

278. Wenn ihr setzet, daß die Hyperbel mit ihrer Asymptote zusammen stosse, so fället der Punct R auf M und ist $PR^2 = PM^2$

folgends $PR^2 - PM^2 = o$. Allein $PR^2 - PM^2 = DA^2$. Darum ist $DA^2 = o$. Da nun dieses ungereimt ist, so kan die Asymptote mit der Hyperbel niemahls zusammen kommen.

Die 98. Aufgabe.

Tab. IV. Fig. 84.

279. Die Grösse des Rectanguli aus MR in Mr zu finden.

Auflösung.

Es sey $PR = c$, $MP = y$, so ist $MR = c - y$, $mR = y + c$, folgends $MR. mR = c^2 - y^2 = PR^2 - PM^2$, nemlich

Das Rectangulum aus MR in mR ist gleich der Differenz der Qvadrate von PR und PM.

Zusatz.

280. Weil $PR^2 - PM^2 = DA^2$ (§. 277), so ist $MR. mR = DA^2$.

Die 99. Aufgabe.

Tab. IV. Fig. 34.

281. Wenn QM und sm mit der einen Asymptote Cr, hingegen qm und SM mit der anderen CR parallel gezogen wird, die Verhältnis der Rectangulorum aus QM in MS und qm in ms zu finden.

Auflösung.

Es sey $RM = mr = a$, $Rm = rM = b$, $MQ = v$, $mq = z$. Nun ist (§. 184. *Geom.*),

RM

RM : MQ = Rm : mſ
$a : v = b : (bv : a)$
rm : mq = rM : MS
$a : z = b : (bz : a)$

Derowegen iſt MQ. MS $= bvz : a$ und mq. mſ $= bvz : a$, folgends MQ. MS = mq. mſ, das iſt,

Die Rectangula aus MQ in MS und mq in mſ ſind einander gleich.

Die 100. Aufgabe.

282. Die Verhältnis des Rectanguli aus qm in ms zu der Potenz der Hyperbel zu finden. Tab. IV. Fig. 34.

Auflöſung.

Es ſey mr $= z$, qm $= y$, AE $= c$; ſo ſind wegen der Parallel-Linien AE und Pr die Winckel CEA und qrm, und wegen der Parallelen AI und qm die Winckel AIE und mqr einander gleich, (§. 97. *Geom.*), folgends (§. 183. *Geom.*).

mr : qm = AE : AI
$z : y = c : (cy : z)$

Wiederum weil mR. mr = AE^2 (§. 280): ſo iſt (§. 137).

mr : AE = AE : mR
$z : c = c : (c^2 : z)$

Endlich wegen der Parallel-Linien ſm und

CE ist $o = x$ und wegen der Parallelen DE und Rm $x = y$ (§. 97. *Geom.*), folgends $o = y$ (§. 28 *Arithm.*): Wegen der Parallelen AI und CR aber ist IAE = CDE, und wegen der Parallelen DE und Rm CDE = ſRm (§. 97. *Geom.*), folgends IAE = ſRm (§. 28. *Arithm.*) Daher (§. 183. *Geom.*)

$$AE : IE = mR : ſm$$
$$c : cy = \frac{cc}{z} : \frac{c^2y}{z^2}$$

Solchergestalt ist ſm. qm $= c^2y^2 : z^2$. Da nun auch $AI^2 = c^2y^2 : z^2$; ſo ist ſm. qm = AI^2, das ist,

Das Rectangulum aus ſm, oder Cq, in qm ist der Potentz der Hyperbel gleich.

Der 1. Zuſatz.

283. Es ſey CI = AI = a, Cq = x, qm = y; ſo ist $xy = aa$ die Gleichung, welche die Natur der Hyperbel zwiſchen ihren Aſymptoten erkläret. Tab. IV. Fig. 34.

Der 2. Zuſatz.

284. Wenn demnach die Aſymptoten BA und AC nebſt der Potentz der Hyperbel DE^2 gegeben werden; ſo könnet ihr die Hyperbel beſchreiben. Ziehet nemlich durch E die Linie FG mit AC und PN mit DE parallel. Ziehet ferner aus A in N eine gerade Linie AN und Tab. IV. Fig. 35.

und HM mit AC parallel; so ist der Punct M in der Hyperbel. Denn AP : PN = AD : DH (§. 184. *Geom.*), das ist, weil PN = DE und PM = DH, auch (§. 275.) ED = DA, AP : DE = AD : PM

$$x : a = a : y$$

folgends

$$a^2 = xy$$

Der 3. Zusatz.

285. Die Gleichung für unendliche Hyperbeln ist $a^{m+n} = x^m y^m$.

Anmerckung.

286. Eben so könnet ihr eine Gleichung für unendliche Hyperbeln in Ansehung der Axe finden $ay^{m+n} = bx^m(a+x)^n$, deren Beschreibung Intieri in aditu ad nova arcana Geometrica detegenda lehret pag. 36. & seq. Es ist aber zu mercken/ daß nach seiner Manier die Hyperbeln von einem höheren Geschlechte niemahls beschrieben werden können/ man habe denn zuvor alle niedrigeren beschrieben. Eine andere leichtere Manier zeige ich in den Actis Eruditorum A. 1717.

Der 4. Zusatz.

287. Wenn ihr wie vorhin AD = DE = a, AI = b, IP = x, PM = y setzet; so ist AP = $b+x$, folgends $a^2 = by + xy$. Tab. IV. Fig. 35.

Die 30. Erklärung.

288. Eine gleichseitige Hyperbel wird genennet, in welcher die beyden Axen AB und DE einander gleich sind. Tab. IV. Fig. 34.

Der 1. Zusatz.

289. Also ist auch der Parameter der Axen AB gleich (§. 262).

Der 2. Zusatz.

290. Wenn man in der Gleichung für die Hyperbel $y^2 = bx + bx^2 : a$ demnach $a = b$ setzet; so kommet die Gleichung für die gleichseitige $y^2 = bx + x^2$.

Der 3. Zusatz.

Tab. IV. Fig. 34. 291. Weil CA = AE; so ist der Winckel ACE 45°, folgends der Asymptoten-Winckel RCr ein rechter Winckel.

Anmerckung.

292. Damit nun erhelle/ daß die Parabel/ Ellipsis und Hyperbel aus einem Kegel sich schneiden lassen, und also die Kegelschnitte der Alten sind; so will ich folgende drey Aufgaben noch hinzusetzen.

Die 101. Aufgabe.

Tab. IV. Fig. 36. 293. Die Natur der krummen Linie zu finden, die herauskommet, wenn man den Kegel ABC dergestalt schneidet, daß die Axe des Schnittes DE mit der Seite des Kegels CA parallel ist.

Auflösung.

Es sey HP mit AB und PM mit EN parallel, AE = HP = v, PI = t, DP = x, DE = z; so ist (§. 184. *Geom.*)

DP : DE = PI : EB

$x : z = t : (tz : x)$

und $PM^2 = HP . PI$ (§. 198) $= tv$, $EN^2 =$ AE. EB = $tzv : x$ (§. *cit.*), folgends

PM^2

$PM^2 : EN^2 = tv : (tzw : x)$
$= x : z$ (§. 144)
$= DP : DE$

Solchergestalt ist DLN eine Parabel (§. 231).

Die 102. Aufgabe.

Tab. IV. Fig. 37.

294. Die Natur der krummen Linie zu finden, die entstehet, wenn ein Kegel BCA dergestalt geschnitten wird, daß die Axe des Schnittes DE den Diameter der Grund-Fläche AB durchschneidet, so sie beyde verlängert werden.

Auflösung.

Es sey $DE = a$, $DP = x$, $DQ = v$, $PH = t$, $QL = s$; so ist $PE = a - x$, $QE = a - v$ und weil IH mit LK parallel,

$DP : PH = DQ : QK$ (§. 184. *Geom.*)
$x : t = v : (vt : x)$
$EQ : QL = EP : PI$
$a - v : s = a - x : as - sx$

$$\frac{as - sx}{a - v}$$

Demnach ist $PM^2 = HP.PI = (tsa - tsx) : (av - v)$ und $QN^2 = KQ.QL = vts : x$ (§. 198), folgends

$$PM^2 : QN^2 = \frac{tsa - tsx}{a - v} : \frac{vts}{x}$$

$= ax - x^2 : av - v^2$ (§. 144).

Solchergestalt ist die Linie DLEND eine Ellipsis. (§. 250).

Die 103. Aufgabe.

Tab. IV. Fig. 38.

295. Die Natur der krummen Linie zu finden, welche entstehet, wenn ein Kegel ACB dergestalt geschnitten wird, daß die Axe des Schnittes DQ die Seite des Kegels AC schneidet, wenn beyde verlängert werden.

Auflösung.

Es sey $ED = a$, $DP = x$, $DQ = v$, $PH = t$, $PI = f$; so ist $EP = a + x$, $EQ = a + v$, und (§. 184. *Geom.*).

$$EP : PH = EQ : AQ$$
$$a + x : t = a + v : \frac{at + tv}{a + x}$$

$$DP : PI = DQ : QB$$
$$x : f = v : (fv : x)$$

Demnach ist $PM^2 = HP \cdot PI = tf$ und $QN^2 = AQ \cdot QB = (atfv + v^2 f : t) : (ax + x^2)$ (§. 198), folgends

$$PM^2 : QN^2 = tf : \frac{axfv + v^2 ft}{ax + x^2}$$
$$= ax + x^2 : av + v^2 \text{ (§. 144)}$$

Solchergestalt ist die Linie DLNMD eine Hyperbel (§. 267).

Die 31. Erklärung.

296. Es sey eine gerade Linie BD, welche

che mitten in E von einer anderen AC rechtwincklicht durchschnitten wird. Ziehet aus C durch DB so viel gerade Linien als ihr wollet, und machet überall QM = EA. Die Linie, welche durch alle Puncte M gehet, ist die Muschel-Linie (CONCHOIS oder CONCHILIS) des Nicomedis. Dergleichen Linie entstehet auch unten, wenn man überall QN = EF machet. Tab. V. Fig. 39.

Der 1. Zusatz.

297. Weil QM mit DB immer einen schiefern Winckel machet, je weiter sie von EA wegkommet; so muß die Conchois der geraden Linie DB immer näher kommen.

Der 2. Zusatz.

298. Doch weil QM niemahls zu einem Puncte werden kan, sondern vielmehr immer einerley Länge behält; so können auch die Puncte Q und M niemahls zusammen stossen, folgends kan die Conchois niemahls mit der Linie DB zusammen kommen. Und also ist DB ihre Asymptote.

Die 104. Aufgabe.

299. Eine Gleichung zu finden, welche die Natur der Muschel-Linie erkläret.

Auflösung.

Es sey $QM = AE = a$, $EC = b$, $MR = EP = x$, $ER = PM = y$; so ist $CP = b + x$ und (§ 184. *Geom.*).

PE

$$PE : MQ = EC : CQ$$
$$x : a = b : (ab : x)$$

Daher $CM = a + ab : x = (ax + ab) : x$, folgends, weil $PM^2 + PC^2 = CM^2$ (§. 172. *Geom.*), $y^2 + x^2 + 2bx + b^2 = (a^2 b^2 + 2a^2 bx + a^2 x^2) : x^2$ das ist, $x^4 + 2bx^3 + y^2 x^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 + 2a^2 bx + a^2 x^2$, welche Gleichung die Natur der oberen Muschel-Linie MAM erkläret.

Es sey $CE = b$, $QN = a$, $EG = ON = x$, $GN = EO = y$, so ist $GC = b - x$ und (§. 184. *Geom.*).

$$EG : QN = GC : CN$$
$$x : a = b - x : (ab - ax) : x$$

Daher, weil $CN^2 = CG^2 + GN^2$ (§. 172. *Geom.*), $(a^2 b^2 - 2a^2 bx + a^2 x^2) : x^2 = b^2 - 2bx + x^2 + y^2$, das ist; $a^2 b^2 - 2a^2 bx + a^2 x^2 = b^2 x^2 - 2bx^3 + x^4 + x^2 y^2$, welche Gleichung die Natur der unteren Muschel-Linie NFN erkläret.

Die 32. Erklärung.

Tab. IV. Fig. 40.

300. Wenn man die Semiordinaten des Circuls PM verlängert und auf die Sehnen AM den Perpendicul AN aufrichtet, die sie in N durchschneiden; so kommet die krumme Linie heraus, welche *Diocles* vor diesem *CISSIODEM* genennet.

Der

Der 1. Zusatz.

301. Weil PB : PM = PM : PA und PM : PA = PA : PN (§. 210. *Geom.*); so sind die vier Linien BP, PM, AP und PN in einer steten Proportion. Tab. IV. Fig. 40.

Der 2. Zusatz.

302. Es sey AB = a, PN = y, AP = x, so ist PB = $a - x$. Da nun (§. 301. 142)

$$BP^2 : PM^2 = AP^2 : PN^2$$

so ist $a^2 - 2ax + x^2 : ax - x^2 = x^2 : y^2$

das ist $a - x : x = x^2 : y^2$

folgends $x^3 = ay^2 - xy^2$

oder $y^2 = x^3 : (a - x)$

Der 3. Zusatz.

303. Wenn $x = a$ und also BD = y, so ist $a^3 = oy^2$, folgends $o : 1 = a^3 : y^2$ und demnach BD in Ansehung AB unendlich groß, das ist, die Asymptote von der CISSOIDE.

Die 33. Erklärung.

304. Theilet einen Quadranten eines Circuls ABC in so viel gleiche Theile als euch beliebet. In eben so viel Theile theilet den halben Diameter AB in I. II. III. u. s. w. Richtet aus diesen Puncten Perpendicular-Linien auf, und ziehet aus dem Mittelpuncte A in die Theilungs-Puncte des Bogens die Linien A1, A2, A3 u. s. w. welche die Perpendicular-Linien in a, b, c, d. e. durchschneiden. Tab. V. Fig. 41.

den. Die krumme Linie, welche durch die Puncte a. b. c. &c. gehet, wird die *QVADRATRIX* des Dinostratis genennet.

Zusatz.

305. Derowegen ist allezeit wie der gantze Bogen BC zu dem Bogen C4, so AB zu AIV. Es sey BC = *b*, AB = *a*, C4 = *x*, AIV = *y*, so ist *ax* = *by*.

Die 34. Erklärung.

Tab. V. Fig. 42.

306. Theilet eine Linie Ap in lauter gleiche Theile, und richtet aus den Theilungs-Puncten A, P, p &c. Perpendicular-Linien auf AN, PM, pm &c. die in einer geometrischen Proportion abnehmen. Die krumme Linie, welche durch die Puncte N, M, m &c. gehet, wird die Logarithmische genennet.

Zusatz.

307. Es sind demnach die Abscissen AP die Logarithmi der Semiordinaten PM (§. 21. *Trigon.*).

Anmerckung.

308. *Hugenius* hat zu Ende seines Discurses sur la pesanteur verschiedene Eigenschaften dieser Linie beschrieben / welche *Guido Grandus* in einem besonderen Buche demonstriret / das er unter dem Titul Geometrica Demonstratio Theorematum Hugenianorum circa Logisticam seu Logarithmicam Lineam zu Florentz 1701. in 4. herausgegeben. Es können noch andere Arten der Logarithmischen Linien erdacht werd.n. So hat man eine Logarithmische Spiral-Linie erfunden / da der Qvadrant AB in gleiche Theile getheilet wird / und aus dem Mittelpuncte C gegen die Theilungs-Puncte des Bogens die Radii CI, CII, CIII &c. gezogen / von ihnen aber in geometrischer Proportion die

Tab. IV. Fig. 43.

Linien

Linien C1, C2, C3 &c. abgeschnitten werden/ durch deren Ende 1. 2. 3. ꝛc. die verlangte Linie gehet.

Die 35. Erklärung.

309. Wenn sich ein Circul auf einer Linie AC fort beweget, bis er sich gantz überworffen hat, so beschreibet der Punct a die Linie ABC, welche *CYCLOIS* oder die Rad-Linie genennet wird. Tab. V. Fig. 44

Zusatz.

310. Es ist also die Linie AC der Peripherie des Circuls und überhaupt eine jede Semiordinate PM dem Bogen Ma gleich. Denn die gerade Linie Ad ist dem Bogen Pd, und daher der übrige Bogen Pb, folgends auch der Bogen BM der Linie dD gleich. Nun ist OD = ML (§. 22. *Geom.*) = PN (§. 122. *Geom.* §. 2. *Trig.*). Derowegen da NM = dO, so ist auch PN + MN = Od + OD, das ist PM = dD Folgends ist die Semiordinate PM dem Bogen Pb, oder ihrer Abscisse BM gleich.

Die 36. Erklärung.

311. Wenn die Peripherie des Circuls A PA, in gleiche Theile getheilet wird und man den Radium CA in eben so viel Theile theilet, nach diesen CM einen, Cm zweyen ꝛc. solchen Theilen gleich machet; so sind die Puncte M, m &c. in der Spiral-Linie des Archimedis. Diese Linie kan nach Gefallen unendlich verlängert werden durch Hülffe Tab. IV. Fig. 39.

neue-

neuer Circul, die mit dem zwiefachen, dem dreyfachen ꝛc. Radio beschrieben werden.

Zusatz.

312. Es sey die Peripherie $= p$, $AC = r$, $AP = x$, $PM = y$; so ist $CM = r - y$, folgends $pr - py = rx$. Wenn aber $CM = y$; so ist $py = rx$, und demnach für unendliche Spirallinien $r^n x^m = p^n y^m$.

Anmerckung.

313. Bißher habe ich die leichtesten Regeln der Algebra von den niedrigsten Gleichungen erkläret/ und bey allerhand Aufgaben angebracht. Nun wil ich die übrigen vornehmen/ welche man in Auflösung der höheren Gleichungen von nöthen hat.

Von der Natur der Gleichungen.

Die 37. Erklärung.

314. Die Wurtzel ist der Werth der unbekandten Grösse in einer Gleichung. Und ist es eine wahre Wurtzel, wenn sie das Zeichen + hat, z. E. wenn $x = +3$; hingegen eine falsche Wurtzel, wenn sie das Zeichen − hat. z. E. wenn $x = -3$.

Die 105. Aufgabe.

315. Die Natur der Gleichungen und ihre vornehmste Eigenschaften zu untersuchen.

Auflösung.

1. Nehmet so viel Werthe von x an als euch beliebet, formiret daraus einfache Gleichungen, und bringet sie auf o.

2. Multipliciret die einfachen Gleichungen in einander, so werden die höheren heraus kommen, deren Betrachtung euch ihre Eigenschaften offenbahren wird.

Es sey $x = 2$ $x = a$

$x = -3$ $x = -b$

$x = 4$ $x = c$

so ist $x - 2 = 0$ $x - a = 0$

$x + 3 = 0$ $x + b = 0$

$x - 4 = 0$ $x - c = 0$

$x - 2 = 0$ $x - a = 0$

$x + 3 = 0$ $x + b = 0$

$+3x - 6$

$x^2 - 2x$ $x^2 + bx - ab = 0$

$-ax$

$x^2 + x - 6 = 0$

$x - 4 = 0$ $x - c = 0$

$-4x^2 - 4x + 24$ $x^3 + bx^2 - abx + abc = 0$

$x^3 + x^2 - 6x$ $-ax^2 - bcx$

$-cx^2 + acx$

$x^3 - 3x^2 - 10x + 24$

Wenn ihr diese Gleichungen (die ihr nach Belieben auf höhere Grade erhöhen könnet) betrachtet; so werdet ihr mit dem *Harriot* und *Carteſio* wahrnehmen,

1. Die bekandte Grösse des anderen Gliedes sey die Summe aller Wurzeln mit einem

wiedrigen Zeichen; des dritten Gliedes die Summe der Producte aus zwey in zwey Wurzeln; des vierdten die Summe der Producte aus drey in drey Wurzeln, &c. endlich das letzte Glied das Product aus allen Wurzeln mit einander. Z. E. in der Qvadratischen Gleichung ist die bekandte Grösse des anderen Gliedes + 1, die Wurzeln sind + 2 und — 3.

2. Eine jede Gleichung habe so viel Wurzeln als das erste Glied Abmessungen hat, oder der Exponente der Dignität desselben Gliedes Einheiten in sich begreiffet. Z. E. In der Qvadratischen Gleichung ist der Exponente 2, die Zahl der Wurzeln ist auch 2.

3. Und zwar seyn in jeder Gleichung so viel wahre Wurzeln als Abwechslungen der Zeichen sind; so viel falsche als einerley Zeichen auf einander folgen. Z. E. In unserer Qvadratischen Gleichung, die eine wahre Wurzel + 2 und eine falsche — 3 hat, folgen auf einander + + und wechseln ab + —. In der Cubischen, welche zwey wahre Wurzeln + 2 und + 4 und eine falsche — 3 hat; wechseln anfangs + —, darauf folgen auf einander — — und abermahls wechseln ab — +.

Die 1. Anmerckung.

316. Der erste und andere Satz lässet sich gar leichte aus der Art, wie die Gleichungen entstehen, demonstriren, so daß

daß ich es für unnöthig achte/ den Beweiß hieher zu setzen. Allein den dritten/ welchen *Harriot* zuerst durch vielen Versuch gefunden/ hat zur Zeit noch keiner überhaupt erweisen können/ daher ihn auch *Reynaud* aus seiner Analyse demonstré gar weggelassen/ weil er die Regeln der Algebra demonstriren wollen.

Die 2. Anmerckung.

317. Ihr dörffet euch nicht wundern/ daß eine einige Gleichung so gar verschiedene Wurtzeln haben kan. Denn es ist zu wissen/daß eine einige Aufgabe öfters verschiedene Fälle haben kan/ und wir in jedem Falle auf einerley Gleichung verfallen: wie wir Exempel von der Qvadratischen Gleichung gehabt/da einerley Gleichung herauskommet/ ob man die eine oder die andere von den gesuchten Grössen x nennet. Doch weil unterweilen einige Fälle unmöglich werden/ so muß auch die Gleichung unmögliche Wurtzeln haben. Wie viel aber in jedem Falle unmögliche Wurtzeln sind/ hat zwar *Newton* in seiner Arithmetica Universali p. 242. zu zeigen einiger massen sich bemühet; doch weil weder die Regel allgemein ist/noch auch er die Demonstration hinzu setzet/ so wollen wir uns damit nicht aufhalten / zumahl da man sie auch in den Leipziger Actis A. 1708. p. 522. 523. findet.

Die 106. Aufgabe.

318. **Die Wurtzel einer gegebenen Gleichung um eine gegebene Grösse zu vermehren oder zu vermindern, unerachtet man sie noch nicht erkandt hat.**

Auflösung.

Es sey die gegebene Æquation $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$. Ihr sollet die Wurtzel um 3 vermehren. Setzet

$$x + 3 = y$$

so ist $x = y - 3$

$x^2 = y^2 - 6y + 9$

$x^3 = y^3 - 9y^2 + 27y - 27$

$-6x^2 = -6y^2 + 36y - 54$

$+13x = +13y - 39$

$-10 = -10$

$y^3 - 15y^2 + 76y - 130 = 0$

Eine neue Gleichung, darinnen $y = x + 3$.

Wenn ihr in der Gleichung die Wurtzel um 3 vermindern sollet, so setzet

$y - 3 = x$

so ist $y = x + 3$

$y^2 = x^2 + 6x + 9$

$y^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

$-15y^2 = -15x^2 - 90x - 135$

$+76y = +76x + 228$

$-130 = -130$

$x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$

Eine neue Gleichung, darinnen $x = y - 3$.

Die 107. Aufgabe.

319. Die Wurtzel in einer Gleichung durch eine gegebene Grösse zu multipliciren.

Auf-

Auflösung.

Ihr sollet in der Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r = o$ die Wurtzel durch a multipliciren. Setzet

$$ax = y$$

so ist $x = y : a$

$$x^2 = y^2 : a^2$$

$$x^3 = y^3 : a^3$$
$$-px^2 = -py^2 : a^2$$
$$+qx = +qy : a$$
$$-r = -r$$

$$y^3 : a^3 - py^2 : a^2 + qy : a - r = o$$

a^3

$y^3 - apy^2 + a^2qy - a^3r = o$, Eine neue Gleichung, in welcher $y = ax$.

Zusatz.

320. Hieraus erhellet, daß ihr nur die vorgegebene Gleichung durch eine geometrische Progreßion multipliciren dörffet, deren erstes Glied 1, der Exponente aber diejenige Zahl ist, durch welche die Wurtzel multipliciret werden sol. Z. E. Es sol in der Gleichung $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = o$ die Wurtzel durch 2 multipliciret werden: so verfahret also.

$x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$				
1	2	4	8	16

$y^4 + 8y^3 - 76y^2 - 848y \;\|\; 920 = 0$				

eine Gleichung, darinnen $y = 2x$.

Wiederum es sol in der Gleichung $x^4 + qx^2 - rx - s = 0$ die Wurtzel durch c multipliciret werden. Verfahret also

x^4	$*$	$+qx^2$	$-rx$	$-s = 0$
1	c	c^2	c^3	c^4

$y^4 * + c^2qy^2 - c^3ry - c^4s = 0$, eine neue Gleichung, darinnen $y = cx$.

Anmerckung.

321. Der Stern wird jederzeit in die Stelle der Glieder gesetzet, welche fehlen.

Die 108. Aufgabe.

322. Die Wurtzel in einer gegebenen Gleichung durch eine gegebene Grösse zu dividiren.

Auflösung.

Es sey die gegebene Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r = 0$. Die Wurtzel sol durch a dividiret werden, Setzet

$x : a = y$

so ist $x = ay$

$x^3 = a^2y^2$

$x^3 = a^3y^3$

$-px^2 = -a^2py^2$

$+qx = +aqy$

$-r = -r$

$a^3y^3 - a^2py^2 + aqy - r = 0$

$-a^3$

$y^3 - py^2 : a + qy : a^2 - r : a^3 = 0,$

Eine neue Gleichung, in welcher $y = x : a$.

Zusatz.

323. Hieraus erhellet, daß ihr die vorgegebene Gleichung nur durch eine geometrische Progreßion dividiren dörffet, deren erstes Glied 1, der Exponente aber diejenige Grösse ist, wodurch die Division geschehen sol. Z. E. die Wurtzel von $x^4 + 8x^3 - 76x^2 - 848x - 1920 = 0$ sol durch 2 dividiret werden. Verfahret also:

$x^4 + 8x^3 - 76x^2 - 848x - 1920 = 0$

1 2 4 8 16

$y^4 + 4y^3 - 19y^2 - 106y - 120 = 0$

Eine neue Gleichung, darinnen $y = \frac{1}{2}x$.

Wiederum es sol die Wurtzel von $x^3 - 36x - 54 = o$ durch 3 dividiret werden. Verfahret also:

$$x^3 * - 36x - 54 = o$$
$$1 \quad 3 \quad 9 \quad 27$$

$y^3 - 4y - 2 = o$, eine neue Gleichung, darinnen $y = \frac{1}{3}x$.

Die 109. Aufgabe.

324. Eine Gleichung, darinnen einige Glieder fehlen, vollständig zu machen.

Auflösung.

Vermehret die Wurtzel um so viel als ihr wollet, oder vermindert sie (§. 318: so ist geschehen, was man verlangete.

Z. E. Es sey $x^3 * - 23x - 70 = o$. Setzet

$$x + 1 = y$$
so ist $$x = y - 1$$
$$x^2 = y^2 - 2y + 1$$

$$x^3 = y^3 - 3y^2 + 3y - 1$$
$$-23x = -23y + 23$$
$$-70 = -70$$

$$y^3 - 3y^2 - 20y - 48 = o$$

Eine

Eine neue Gleichung, darinnen kein Glied fehlet und $y = x + 1$.

Die 110. Aufgabe.

325. Aus einer gegebenen Gleichung das andere Glied weg zu schaffen.

Auflösung.

Wenn das andere Glied das Zeichen + hat, so vermehret; hat es aber das Zeichen —, so vermindert die Wurtzel (§. 318) durch den Quotienten, der heraus kommet, so man die bekandte Grösse des anderen Gliedes durch den Exponenten des ersten dividiret.

Z. E. Ihr sollet aus der Gleichung $x^3 - 8 x^2 - x + 8 = o$ das andere Glied wegnehmen.

Setzet $x - 8 : 3 = y$

so ist $x = y + 8 : 3$

$x^2 = y^2 + 16y : 3 + 64 : 9$

$x^3 = y^3 + 8y^2 + 64y : 3 + 512 : 27$

$- 8x^2 = - 8y^2 - 128y : 3 - 512 : 9$

$- x = - y - 8 : 3$

$+ 8 = + 8$

$y^3 * - 67y : 3 - 880 : 27 = o$

Eine neue Gleichung, darinnen das andere Glied fehlet und $y = x - 8 : 3$.

Zusatz.

236. Wenn ihr also aus einer Quadratischen Gleichung das andere Glied wegnehmet;

met; könnet ihr solche noch auf eine andere Art, als vorhin (§. 83.) geschehen, auflösen. Z. E.

Es sey $x^3 - 8x + 15 = 0$. Setzet $x - 4 = y$;

so ist $x = y + 4$

$x^2 = y^2 + 8y + 16$

$-8x = +8y - 32$

$+15 = +15$

$y^2 - 1 = 0$

$y = 1$

folgends $x = 1 + 4 = 5$

Die III. Aufgabe.

327. Aus einer gegebenen Gleichung die Brüche wegzuschaffen.

Auflösung.

Multipliciret die Wurzel durch das Product aus den Nennern aller vorkommenden Brüche, oder eine Zahl, durch welche sich die Nenner dividiren lassen. So ist geschehen, was man verlangete.

Exempel.

$y^3 * - 67y : 3 - 880 : 27 = 0$

III 3 9 27

$x^3 * - 201x - 180 = 0.$

Eine neue Gleichung, in welcher $x = 3y$

$$x^3 - \tfrac{2}{3}x^2 + \tfrac{3}{4}x - 64 = 0$$
$$1 \qquad 12 \qquad 144 \qquad 1728$$

$$y^3 - 8y^2 + 108y - 110592 = 0$$

Eine neue Gleichung, in welcher $y = 12x$.

Die 112. Aufgabe.

328. Aus einer gegebenen Gleichung die Irrational-Grössen abzuschaffen.

Auflösung.

Unterweilen kan solches durch die Multiplication; zuweilen durch die Division geschehen. Keine Regel ist allgemein.

$$x^4 + 2ax^3\sqrt{2} + 8abx^2 - a^3x\sqrt{8} - 2a^2b^2 = 0$$
$$1 \qquad \sqrt{2} \qquad 2 \qquad \sqrt{8} \qquad 4$$

$y^4 + 4ay^2 + 16\,aby^2 - 8a^3y - 8a^2b^2 = 0$, eine neue Gleichung, darinnen $y = x\sqrt{2}$.

$$x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - a^2b = 0$$
$$1 \qquad \sqrt[3]{4} \qquad \sqrt[3]{16} \qquad 4$$

$$y^3 - 2ay^2 + 8aby - 4aab = 0$$

Eine neue Gleichung, die gantz rational ist, und deren Wurtzel $y = x\sqrt[3]{4}$.

$$x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - a^2b = 0$$
$$1 \qquad \sqrt[3]{2} \qquad \sqrt[3]{4} \qquad 2$$

$y^3 - ay^2 + 2aby - \frac{1}{2}aab = 0$ Eine

Eine neue Gleichung, die gantz rational ist, und deren Wurtzel $y = x : \sqrt[3]{2}$.

Anmerckung.

329. Alles/ was bißher von den Gleichungen gelehret worden/ ist zu dem Ende geschehen / damit wir sie völlig auflösen/ das ist / den Werth der unbekandten Grösse sowohl geometrisch/ als in Zahlen finden können / welches nun in folgendem gezeiget werden sol.

Die 113. Aufgabe.

330. Alle Rational-Wurtzeln, die in einer gegebenen Gleichung enthalten sind / zu finden.

Auflösung.

1. Es sey die gegebene Gleichung $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$. Weil 24 das Product aus allen Wurtzeln ist ; (§. 315) ; so zerfället es in die Zahlen, durch deren Multiplication es entstehet, welche sind 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 24. und machet daraus folgende einfache Gleichungen $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x + 3 = 0$, $x - 4 = 0$, $x + 4 = 0$ ꝛc.

2. Dividiret die gegebene Gleichung durch diese einfachen, denn durch die sie sich dividiren lässet, die zeigen ihre Rational-Wurtzeln (§. 315). Als $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ läst sich dividiren durch $x + 3$, derowegen ist -3 eine falsche Wurtzel von dieser Gleichung. Der Quotient, so herauskommet, $x^2 - 6x + 8 = 0$ läst sich ferner dividiren durch $x - 2$ und der neue Quotient

ent

ent ist $x - 4$. Derowegen sind 2 und 4 zwey wahre Wurtzeln von der gegebenen Gleichung.

Anders.

Ihr dörffet auch nur die Zahlen, in welche das letzte Glied zerfället worden, nach einander in die Stelle vor x setzen: denn wenn dadurch die gantze Gleichung zernichtet wird, so ist die vor x gesetzte Zahl eine von ihren Rational-Wurtzeln (§. 315). Z. E. Es sey $x^2 - 6x + 8 = 0$. Das letzte Glied 8 entstehet, wenn ihr 2 durch 4 multipliciret.

Setzet $4 = x$

so ist $16 = x^2$
$-24 = -6x$
$+8 = +8$
$0 = 0$

Solchergestalt ist $+4$ eine von den Rational-Wurtzeln.

Die 1. Anmerckung.

331. Weil in der ersten Maniet das viele Dividiren beschweerlich fallen würde/ hat man diesen Wortheil ausgedacht. 1. Ziehet die Zahl / welche ihr versuchen wollet/ von der bekandten Zahl des andern Gliedes ab / und was herauskommet/ multipliciret durch eben selbe Zahl. 2. Das Product ziehet von der bekandten Zahl in dem dritten Gliede ab/ und was überbleibet / multipliciret abermahl durch mehr gedachte Zahl. 3. Das neue Product ziehet von dem vierdten Gliede ab/ u. s. w. Wenn endlich bey dem letzten Gliede nichts übrig bleibet/ so ist die versuchte Zahl eine von den Rational-Wurtzeln. Z. E. Ihr suchet die Rational-Wurtzeln von $x^3 - 3x2 - 13x + 15 = 0$.

Das

Das letzte Glied 15. lässet sich in 1. 3. 5. 15. zerfällen. Wenn ihr versuchen wollet / ob einige darunter von den Wurtzeln seyn/ geschiehet es folgender Gestalt

$$x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$$

$$-1 \quad +2 \quad +15$$

$$-2 \quad -15 \quad 0$$

$$+2 \quad +15$$

$$x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0.$$

$$+3 \quad -18 \quad +15$$

$$-6 \quad +5 \quad 0$$

$$+3 \quad +3$$

$$-18 \quad +15$$

$$x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$$

$$-5 \quad -10 \quad +15$$

$$+2 \quad -3 \quad 0$$

$$-5 \quad -5$$

$$-10 \quad +15$$

Also ist $x - 1 = 0$, $x + 3 = 0$, $x - 5 = 0$, das ist 1 und 5 sind die beyden wahren Wurtzeln / 3 ist die falsche.

Die 2. Anmerckung.

332. Damit ihr aber sehet/ daß dieser Vortheil aus der ersten Manier völlig genommen/ und für keine besondere zu halten sey/ will ich das vorige Exempel nach der gemeinen Art rechnen.

$$
\begin{array}{l|l}
x-1 & x^3-3x^2-13x+15=0 \\
x^3-x^2 & x^2-2x-15 \\
\hline
 & -2x^2-13x \\
 & -2x^2+2x \\
\hline
 & -15x+15 \\
 & -15x+15 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Die 114. Aufgabe.

333. **Die Schrancken zu finden, zwischen welchen die Grösse der Wurtzeln enthalten ist.**

Auflösung.

Es sey $x^3-qx+r=o$, so ist $x^3+r=qx$ und demnach qx grösser als r, folgends x grösser als $r:q$. Wiederum qx ist grösser als x^3, und daher q grösser als x^2, folgends x kleiner als $\sqrt{q}$. Die Schrancken der Wurtzeln in gegenwärtigem Falle sind also $r:q$ und $\sqrt{q}$.

Es sey $x^3+qx-r=o$, so ist $x^3+qx=r$, und demnach qx kleiner als r, folgends x kleiner als $r:q$. Wiederum r ist grösser als x^3 und daher x kleiner als $r^{1:3}$, folgends $xr^{2:3}$ grösser als x^3, und $xr^{2:3}+qx$ grösser als r, endlich x grösser als $r:(r^{2:3}+q)$. Also fället die Grösse der Wurtzel zwischen $r:q$ und $r:(r^{2:3}+q)$. Es sey $x^3-px^2+qx-r=o$, so ist $x^3-px^2=r-qx$. Wenn nun x grösser

als

als p, so ist auch r grösser als qx und dannenhero x kleiner als $r:q$. Hingegen wenn p grösser als x ist, so ist qx grösser als r, und dannenhero auch x grösser als $r:q$. Derowegen fallen in beyden Fällen die Wurtzeln zwischen p und $r:q$.

Es sey $x^3 - px^2 - qx + r = o$, so ist $x^3 + r = px^2 + qx$, folgends $px^2 + qx$ grösser als r, und daher auch $x^2 + qx:p + qq:4pp$ grösser als $r:p + qq:4pp$, $x + q:2p$ grösser als $\sqrt{(r:p + qq:4pp)}$, endlich x grösser als $\sqrt{(r:p + qq:4pp)} - q:2p$. Wiederum $px^2 + qx$ ist grösser als x^3, dannenhero $px + q$ grösser als x^2, und q grösser als $x^2 - px$, das ist $x^2 - px + \frac{1}{4}pp$ kleiner als $q + \frac{1}{4}pp$, $x - \frac{1}{2}p$ kleiner als $\sqrt{(q + \frac{1}{4}pp)}$, endlich x kleiner als $\frac{1}{2}p + \sqrt{(q + \frac{1}{4}pp)}$. Die Schrancken also der Wurtzeln sind $\sqrt{(r:p + qq:4pp)} - q:2p$ und $\frac{1}{2}p + \sqrt{(q + \frac{1}{4}pp)}$.

Es sey $x^4 - qx^2 - rx - s = o$, so ist $x^4 - qx^2 = rx + s$. Demnach ist x^2 grösser als q, weil sich qx^2 von x^4 abziehen läst, und x grösser als $\sqrt{q}$. Daher xrq grösser als q und x^3 $\sqrt{q}$ grösser als qx^2. Wiederum weil $x^4 - rx = qx^2 + s$, so ist x^3 grösser als r und x grösser als $r^{1:3}$, daher x^2 grösser als $xr^{1:3}$, x^3 grösser als $xr^{2:3}$, und $x^3 r^{1:3}$ grösser als rx. Endlich da $x^4 - s = qx^2 + rx$, so ist x^4 grösser als s, und x grösser als $s^{1:4}$, folgends x^3 grösser als $s^{1:4}$, x^3 grösser als $s^{3:4}$ und $x^3 s^{1:4}$ grösser als s. Weil nun $x^4 = qx^3 + rx + s$, so ist x^4

klei-

kleiner als $x^3 \sqrt{q} + xr^{1:3} + x^3 s^{1:4}$, und deswegen x kleiner als $q^{1:2} + r^{1:3} + s^{1:4}$. Die Schrancken der Wurtzel in gegenwärtigem Falle sind also $\sqrt{q}$ oder $r^{1:3}$ und $q^{1:2} + s^{1:4}$.

Eben so wird in anderen Fällen verfahren.

Anmerckung.

334. Damit ihr die vorgeschriebene Manier besser fassen möget/ will ich ein Exempel in Zahlen anführen. Z. E. Es sey $x^3 - 3x + 1 = 0$, so ist $q = 3$ und $r = 1$, folgends $r : q = 1 : 3$ und $\sqrt{q} = \sqrt{3}$. Solchergestalt sind die Schrancken dieser Gleichung $\frac{1}{3}$ und $\sqrt{3}$, das ist/ die Wurtzel muß grösser als $\frac{1}{3}$ und kleiner als $\sqrt{3}$ seyn.

Zusatz.

335. Wenn ihr die Zahl wisset, welche grösser als eure Wurtzel ist, so werdet ihr nicht mit vergeblichen Zahlen (§. 330. 331.) versuchen, ob sie unter die Rational-Wurtzeln gehören oder nicht.

Die 115. Aufgabe.

336. Aus einer Cubischen Gleichung die Wurtzeln zu finden.

Auflösung.

Wenn aus den cubischen Gleichungen das andere Glied weggenommen wird, so bekommet ihr drey Fälle, nemlich

$$x^3 = +px + q$$
$$x^3 = -px + q$$
$$x^3 = +px - q$$

Damit ihr nun die Wurtzel findet, so setzet

$$x = y + z$$

Dann ist $x^3 = y^3 + 3y^2z + 3z^2y + z^3$

$$px = py + pz$$

$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 = py + pz + q$ im ersten

Setzet $3yz^2 + 3z^2y = py + pz$ (Falle.

$y + z$

so ist $3yz = p$

$$z = p : 3y$$

Ferner ist $y^3 + z^3 = q$

das ist $y^3 + p^3 : 27y^3 = q$

$$y^6 + p^3 : 27 = qy^3$$

$$y^6 - qy^3 = -p^3 : 27$$

$\frac{1}{4}qq$ $\frac{1}{4}qq$ (§. 83).

$$y^6 - qy^3 + \tfrac{1}{4}qq = \tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3$$

$$y^3 - \tfrac{1}{2}q = V(\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3)$$

$$y = (\tfrac{1}{2}q + V(\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3))^{1:3}$$

Nun ist

$$z^3 = q - y^3$$

das ist $z^3 = \frac{1}{2}q - V(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3)$

$$z = (\tfrac{1}{2}q - V(\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3))^{1:3}$$

Demnach ist $z + y = (\frac{1}{2}q - V(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3))^{1:3} + (\frac{1}{2}q + V(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3))^{1:3}$ die verlangte Wurz in dem ersten Falle.

Eben

Eben so findet ihr für — p in dem anderen Falle $(\frac{1}{2}q + V(\frac{1}{2}qq + \frac{1}{27}p^3))^{1:3} + (\frac{1}{2}q - V(\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3))^{1:3}$.

Und in dem dritten Falle $(-\frac{1}{2}q + V(\frac{1}{2}qq - \frac{1}{27}p^3))^{1:3} + (-\frac{1}{2}q - V(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3))^{1:3}$.

Die 1. Anmerckung.

337. Diese Regeln werden insgemein *Cardani* Regeln genennet/ weil er sie aus *Scipionis Ferrei* Erfindung zuerst in Druck gegeben.

Die 2. Anmerckung.

338. Damit aber ihr Gebrauch erhelle/ so will ich eines und das andere Exempel anführen. Es sey $x^3 = *\ 6x + 40$. Weil $p = 6$, $q = 40$, und daher $\frac{1}{2}q = 20$, $\frac{1}{4}qq = 400$, $\frac{1}{3}p = 2$, $\frac{1}{27}p^3 = 8$; so ist vermöge der ersten Regel $x = (20 - V(400 - 8))^{1:3} + (20 + V(400 - 8))^{1:3} = (20 - V\,392)^{1:3} + (20 + V\,392)^{1:3} =$ (wenn die Cubic-Wurtzel beyderseits würcklich ausgezogen wird) $2 - V\,2 + 2 + V\,2 = 4$. Ist demnach 4 eine wahre Wurtzel.

Es sey $x^3 = *\ -3x + 36$. Weil $p = -3$, $q = 36$, und daher $\frac{1}{2}q = 18$, $\frac{1}{4}qq = 324$, $\frac{1}{3}p = -1$, $\frac{1}{27}p^3 = -1$; so ist vermöge der anderen Regel die Wurtzel $(18 - V(324 + 1))^{1:3} + (18 + V(324 + 1))^{1:3} =$ (wenn ihr die Cubic-Wurtzel beyderseits würcklich ausziehet) $1\frac{1}{2} - V\,3\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2} + V\,3\frac{1}{4} = 3$.

Es sey $x^3 = *\ 6x - 40$. Weil $p = 6$, $q = -40$, und daher $\frac{1}{2}q = -20$, $\frac{1}{4}qq = 400$, $\frac{1}{3}p = 2$, $\frac{1}{27}p^3 = 8$; so ist vermöge der dritten Regel $(-20 + V(400 - 8))^{1:3} + (-20 - V(400 - 8))^{1:3} = (-20 - V\,392)^{1:3} + (-20 + V\,392)^{1:3} =$

(wenn die Cubic-Wurtzel beyderseits würcklich ausgezogen wird) $-2-\sqrt{2}+\sqrt{2-2}=-4$. Demnach ist eine falsche Wurtzel der vorgegebenen Gleichung.

Die 3. Anmerckung.

339. Man hat zwar auf eine gleiche Art eine Regel für die Wurtzeln aus einer Gleichung von dem vierdten Grade auszuziehen gefunden: allein weil sie nicht sonderlich gebraucht wird/ so will ich die Anfänger damit nicht aufhalten/ sondern gehe vielmehr fort und zeige / wie man durch Näherung die Wurtzel finden kan / wenn eine Gleichung keine Rational-Wurtzel hat.

Die 116. Aufgabe.

340. Aus einer jeden gegebenen Gleichung die Wurtzel durch Näherung zu finden.

Auflösung.

Wir wollen die Regeln bald bey Exempeln anbringen, und zwar den Anfang von einer quadratischen Gleichung machen, damit wir sie desto besser begreiffen.

Es sey demnach $x^2-5x-31=0$. Setzet vermöge der Gräntzen, welche die Gleichung haben kan (§. 333), die Wurtzel sey $8+y$, dergestalt daß y einen Bruch bedeutet, um welchen 8 entweder gröſſer oder kleiner ist als x. Solcher gestalt ist

$$x^2=64+16y+y^2$$
$$-5x=-40-5y$$
$$-31=-31$$

$$-7+11y+y^2=0$$

Da nun die Dignitäten eines Bruches bestän-

ständig abnehmen und man hier nur die Wurtzel beynahe wissen wil, so lässet man y^2 weg und nimmet an

$$-7+11y=0$$

das ist $11y=7$

$$y=0.6=0.\frac{6}{10}$$

Also ist $x=8+0.6=8.6$

Weil der Werth von x in Zehen-Theilchen noch nicht genau genung bestimmet; so setzet $x=8.6+y$ und verfahret, wie vorhin. Ihr findet demnach

$$x^2=\frac{7396}{100}+\frac{172}{10}y+y^2$$
$$-5x=-\frac{430}{10}-5y$$
$$-31=-31$$

$$\frac{7396}{100}-\frac{430}{10}-31+\frac{172}{10}y-5y=0$$

Das ist, wenn man die Brüche unter einerley Benennung bringet (welches hier den Anfängern zugefallen einmahl für allemahl geschehen sol)

$$73.96-4300-3100+(1720-500)y=0$$

$$-0.04+12.20y=0$$

$$12.20y=0.04$$

$$y=0,0032$$

Also ist $x = 8.6000 + 0.0032 = 8.6032$.

Wenn ihr die Wurzel noch genauer verlanget; so setzet $x = 8.6032 + y$. Alsdenn ist

$$x^2 = 74.01505024 + 17.20640000y + y^2$$
$$- 5x = -43.01600000 - 5.00000000y$$
$$- 31 = -31.00000000$$

$$- 0.00009497 6 + 12.20640000y = 0$$

$$12.20640000y = 0.00094976$$

$$y = 0.0000777808$$

Also ist $x = 8.6032777808$

Man sol ferner die Wurzel aus der Cubischen Gleichung $x^3 + 2x^2 - 23x - 70 = 0$ ausziehen. Setzet

$$5 + y = x$$

so ist $x^3 = 125 + 75y \ldots$
$$+ 2x^2 = +50 + 20y \ldots$$
$$- 23x = -115 - 23y$$
$$- 70 = -70$$

$$- 10 + 72y = 0$$

$$72y = 10$$

$$y = 0.1$$

Also ist $x = 5 + 0.1 = 5.1$

Setzet

Setzet ferner $x = 5.1 + y$; so ist

$$\begin{array}{rl} x^3 = & 132.651 + 78.030y \ldots \\ +2x^2 = & +52.020 + 20.400y \ldots \\ -23x = & 117.300 - 23.000y \\ -70 = & 70.000 \end{array}$$

$$-2.629 + 75.430y = 0$$

$$75.430y = 2.629$$

$$y = 0.0348$$

Also ist $x = 5.1 + 0.0348 = 5.1348$

Wolte man die Wurtzel noch genauer haben; so setzte man $x = 5.1348 + y$ und suchte den Werth von y, wie vorhin.

Wenn ihr die Wurtzel geschwinder in vielen Zahlen genau haben wollet; so müsset ihr noch den Werth von y^2 beybehalten und die qvadratische Gleichung auf gewöhnliche Art (§. 83) auflösen, nur daß ihr zehentheilige Brüche behaltet. Nemlich wenn $x = 5 + y$; so ist

$$x^3 = 125 + 75y + 15y^2$$
$$+2x^2 = 50 + 20y + 2y^2$$
$$-23x = -115 - 23y$$
$$-70 = -70$$

$$-10 + 72y + 17y^2 = 0$$

$$17y^2 + 72y = 10$$

$$y^2 + 4.2352y = 0.588235\,30$$
$$4.48422976 \quad 4.48422976$$

$$y^2 + 4.2352y + 4.48422976 = 5.07246506$$

$$y + 2.1176 = 2.2522$$

$$y = 0.1346$$

Also ist $x = 5.1346$

Wolltet ihr nun setzen $x = 5.1346 + y$ und wie vorhin den Werth von y finden; so würdet ihr gleich durch die andere Rechnung sehr weit hinauf kommen.

Die 1. Anmerckung.

341. In meinen Element. Analyf. (§. 327) habe ich gewiesen/ wie auf diese Art gar leichte die Regel des Herrn *Halley* heraus gebracht werde / daraus man in Engelland sehr viel machet. Allein weil die gegebene Regel eben so geschwinde den Werth der Wurtzel in so kleinen Theilen giebet/und doch viel leichter als die Halleianische zu behalten ist/indem sie die Klarheit ihres Beweises mit sich führet; so kan man am sichersten bey derselben verbleiben.

Die 2. Anmerckung.

342. Nun könte ich auch zeigen/wie der Werth von x in den gegebenen Gleichungen geometrisch gesucht wird. Allein

lein weil die geometrische Ausführung der determinirten Aufgaben sich am besten aus der Ausführung der undeterminirten herleiten läst; wil ich zuerst arithmetische Exempel von dergleichen Aufgaben beybringen/ zumahl da sie in der höheren Geometrie und der Differential-Rechnung mehr Nutzen haben/als wohl einige vermeinen/ auch besondere Kunstgriffe nachzusinnen an die Hand geben.

Von undeterminirten Aufgaben.

Die 117. Aufgabe.

343. Vier Zahlen von der Beschaffenheit zu finden/daß die Summe der beyden ersten der dritten und ihre Differentz der vierdten Zahl gleich sey.

Auflösung.

Es sey die erste Zahl x, die andere y, die dritte z, die vierdte t, so ist

$y + x = z$	$x - y = t$
$2y + t = z$	$x = t + y$
$2y = z - t$	$x = t + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}t$
$y = (z - t) : 2$	$x = (z + t) : 2$

da nun nicht mehr Gleichungen zu erdencken sind, können die Zahlen z und t nach Belieben angenommen werden. Es sey $z = 8$, $t = 2$; so ist $x = (8 + 2) : 2 = 10 : 2 = 5$, und $y = (8 - 2) : 2 = 6 : 2 = 3$. Es sey $z = 5$, $t = 1$; so ist $x = (5 + 1) : 2 = 6 : 2 = 3$, $y = (5 - 1) : 2 = 4 : 2 = 2$.

Anmerckung.

344. Wenn ihr gantze Zahlen verlanget/ so müssen vor x und z solche angenommen werden/deren Summe und Differentz sich durch z dividiren läst.

Die 118. Aufgabe.

345. Zwey Zahlen zu finden, deren Summe zugleich mit ihrem Producte einer gegebenen Zahl gleich ist.

Auflösung.

Es sey die gegebene Zahl $= a$, die eine von den begehrten $= x$, die andere $= y$, so ist

$$xy + x + y = a$$

$$xy + x = a - y$$

$$x = (a - y) : (y + 1)$$

Es sey $a = 30$, $y = 2$, so ist $x = (30-2) : (2+1) = 28 : 3 = 9\frac{1}{3}$. Es sey $a = 20$, $y = 2$, so ist $x = (20-2) : (2+1) = 18 : 3 = 6$. Es sey $a = 19$, $y = 4$, so $x = (19-4) : (4+1) = 15 : 5 = 3$.

Die 119. Aufgabe.

346. Zwey Zahlen zu finden, deren Product ein vollkommener Cubus ist, dessen Wurtzel dem Producte aus der ersten in das Quadrat der anderen gleich ist.

Auflösung.

Es sey die erste Zahl $= x$, die andere $= y$, die Cubic-Wurtzel $= v$, so ist

$v =$

$v = xy^2$ $\qquad$ $xy = v^3$

$v : y^2 = x$ $\qquad$ $x = v^3 : y$

$v : y^2 = v^3 : y$

y^2

$v = v^3 y$

v

$1 = v^2 y$

$1 : v^2 = y$

Derowegen ist $v^5 = x$

Setzet $v = 2$, so ist $x = 32$, $y = \frac{1}{4}$. Es sey $v = 3$, so ist $x = 243$, $y = \frac{1}{9}$.

Die 120. Aufgabe.

347. Die Summe zweyer vollkommenen Quadrate in zwey andere vollkommene Quadrate zu theilen.

Auflösung.

Es sey die Seite des grösten Quadrates $= a$, des kleinesten $= b$: die Seite des einen von dem gesuchten $a - z$, des anderen $yz - b$. So ist

$aa - 2az + zz + y^2z^2 - 2byz + bb = aa + bb$

$zz + yyzz = 2byz + 2az$

z

$z + yyz = 2by + 2a$

$1 + y^2$

$z = (2by + 2a) : (y^2 + 1)$

Also

Also ist $= a - z = a - (2by + 2a) : (y^2 + 1) = (ay^2 + a - 2by - 2a) : (y^2 + 1) = (ay^2 - 2by - a) : (y^2 + 1)$. Hingegen $yz - b = (2by^2 + 2ay) : (y^2 + 1) - b = (2by^2 + 2ay - by^2 - b) : (y^2 + 1) = (by^2 + 2ay - b) : (y^2 + 1)$.

Es sey $a = 3, b = 2, y = 2$; so ist $z = (8 + 6) : 5 = 14 : 5$, folgends $a - z = 3 - 14 : 5 = \frac{1}{5}$, und $yz - b = 28 : 5 - 2 = (28 - 10) : 5 = 18 : 5$. Deren Quadrate $(1 + 324) : 25 = 13 = 9 + 4$.

Man nimmet die beyden Seiten $a - z$ und $yz - b$ an, weil von der Summe der beyden Quadrate sich $aa + bb$ muß abziehen und das übrige durch z dividiren lassen, wenn der Werth von z rational seyn sol.

Die 121. Aufgabe.

348. Zwey vollkommene Quadrate zu finden, deren Differentz einer gegebenen Zahl gleich ist.

Auflösung.

Es sey die Seite des kleinen $= x$, des grossen $x + y$, die Differentz $= d$. So ist das kleine Quadrat $= x^2$, das grosse $x^2 + 2xy + y^2$, folgends

$$y^2 + 2xy = d$$

$$2xy = d - y^2$$

$$x = (d - y^2) : 2y$$

Weil

Weil sich y^2 von d abziehen läst, so muß y kleiner seyn als $\sqrt{d}$.

Z. E. Es sey $d = 10, y = 3$; so ist $x = (10 - 9) : 6 = \frac{1}{6}, x + y = 3 + \frac{1}{6}$. Es sey $d = 11, y = 2$; so ist $x = (11 - 4) : 4 = \frac{7}{4}, x + y = 2 + \frac{7}{4} = \frac{15}{4}$.

Man nimmet die Seite des grossen Quadrates $x + y$ an und nicht bloß y, damit der Werth von x rational gefunden wird.

Die 122. Aufgabe.

349. Eine Zahl in zwey andere zu zertheilen, deren Product ein vollkommenes Quadrat ist.

Auflösung.

Es sey die Zahl $= 2a$, die Differentz $= 2y$; so ist die grosse $a + y$, die kleine $a - y$ (§. 61.); ihr Product $= aa - yy$). Setzet die Seite des Quadrates $xy - a$. So ist

$$aa - yy = aa - 2axy + x^2y^2$$

$$2axy = x^2y^2 + y^2$$

$$2ax = x^2y + y$$

$$2ax : (x^2 + 1) = y$$

Es sey $x = 2, 2a = 10$; so ist $y = 20 : 5 = 4, a + y = 5 + 4 = 9, a - y = 5 - 4 = 1$.

Es sey $2a = 10, x = 0$; so ist $y = 0$, folgends $a + y = 5, a - y = 5$.

Es

Es sey $2a = 10$, $x = 3$; so ist $y = 30 : 10 = 3$, $a + y = 5 + 3 = 8$, $a - y = 5 - 3 = 2$.

Die Seite des Qvadrates wird $xy - a$ angenommen, damit man in der Gleichung aa wegbringen und das übrige durch y dividiren kan, damit der Werth von y rational gefunden wird.

Die 123. Aufgabe.

350. Zwey Zahlen zu finden von der Beschaffenheit, daß, wenn die eine zu dem Qvadrate der anderen gesetzet wird, die Summe ein Qvadrat sey, deren Seite die Summe der Zahlen ist.

Auflösung.

Es sey die eine Zahl x, die andere y; so ist

$$x^2 + y = x^2 + 2xy + y^2$$

$$y - y^2 = 2xy$$

$$(1 - y) : 2 = x$$

Es sey $y = \frac{1}{2}$; so ist $x = \frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$. Es sey $y = \frac{1}{3}$; so ist $x = (1 - \frac{1}{3}) : 2 = \frac{2}{3} : 2 = \frac{1}{3}$.

Die 124. Aufgabe.

351. Zwey Zahlen zu finden von der Beschaffenheit, daß, wenn die eine zu dem Qvadrate der anderen gesetzet wird, die Summe die Seite eines Qvadrates sey, so den beyden Zahlen gleich ist.

Auf-

Auflösung.

Es sey die eine Zahl z, die andere y; so ist

$$z^2 \pm y = \sqrt{(z \pm y)}$$

$$z^4 \pm 2z^2y \pm yy = z \pm y$$

$$z^4 \pm 2z^2y - y \pm yy = z$$

das ist wenn $2z^2 - 1 = v$

$$vy \pm yy = z - z^4$$

$$\tfrac{1}{4}v^2 \pm vy \pm yy = \tfrac{1}{4}v^2 \pm z - z^4$$

$$\tfrac{1}{2}v \pm y = \sqrt{(\tfrac{1}{4}v^2 \pm z - z^4)}$$

$$y = \sqrt{(\tfrac{1}{4}v^2 \pm z - z^4)} - \tfrac{1}{2}v$$

das ist, wenn ihr für v wieder seinen Werth in die Stelle setzet

$$y = \sqrt{(z^4 - z^2 + \tfrac{1}{4} + z - z^4)} - z^2 + \tfrac{1}{2}$$

das ist $y = \sqrt{(\tfrac{1}{4} + z - z^2)} + \tfrac{1}{2} - z^2$

Wenn ihr nun Rational-Zahlen verlanget, so muß $\tfrac{1}{4} + z - z^2$ ein vollkommenes Quadrat seyn.

Setzet demnach seine Seite $= zx - \tfrac{1}{2}$ (§. 349), so ist

$$z^2x^2 - zx + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} + z - z^2$$

$$z^2x^2 - zx = z - z^2$$

$$zx^2 - x = 1 - z$$

$$zx^2 + z = x + 1$$

$$z = (x+1) : (x^2+1)$$

Es sey $x = 2$; so ist $z = (2+1) : (4+1) = \frac{3}{5}$, folgends $y = \frac{1}{2} - \frac{9}{25} + V(\frac{1}{4} + \frac{3}{5} - \frac{9}{25}) = (25 - 18) : 50 + V((25+24) : 100) = 7 : 50 + V(49 : 100) = \frac{7}{50} + \frac{7}{10} = \frac{70+350}{500} = \frac{420}{500} = \frac{21}{25}$.

Die 125. Aufgabe.

352. Zwey Quadrate von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn ihr das eine zu dem Producte von beyden addiret, eine jede Summe ein vollkommenes Quadrat sey.

Auflösung.

Es sey das eine Quadrat x^2, das andere y^2, so ist ihr Product x^2y^2; folgends sind $x^2y^2 + x^2$ und $x^2y^2 + y^2$ vollkommene Quadrate. Dividiret das erste durch x^2, das andere durch y^2; so sind $y^2 + 1$ und $x^2 + 1$ gleichfals vollkommene Quadrate. Nennet die Seite des ersten $z - y$, das andere $t - x$, damit sich y^2 und x^2 subtrahiren lässet, folgends

der

der Werth von y und x rational gefunden werden mag; so ist

$y^2+1=z^2-2zy+y^2$ | $x^2+1=t^2-2tx+x^2$

$1=z^2-2zy$ | $1=t^2-2tx$

$1+2zy=z^2$ | $2tx=t^2-1$

$y=(z^2-1):2z$ | $x=(t^2-1):2t$

Es sey $z=2, t=3$, so ist $y=(4-1):4=\frac{3}{4}$ und $x=(9-1):6=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$.

Es sey $z=3, t=4$; so ist $y=(9-1):6=\frac{4}{3}, x=(16-1):8=\frac{15}{8}$.

Die 126. Aufgabe.

353. Zwey Quadrate von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn ihre Summe zu ihrem Producte gesetzet wird, ein vollkommenes Quadrat heraus kommet.

Auflösung.

Es sey das eine Quadrat x^2, das andere y^2, so ist $x^2y^2+x^2+y^2$ ein vollkommenes Quadrat. Setzet anfangs aus vorhin (§. 352) angeführtem Grunde.

$$y^2-2ty+tt=yy+1$$

so ist $t^2=1+2ty$

$(t^2-1):2t=y$

$t-y=t-(t^2-1):2t=(t^2+1):2t$

Setzet ferner $v = V(yy+1) = t-y = (t^2+1) : 2t$; so ist $x^2y^2+x^2+y^2 = x^2v^2+y^2$. Stellet dessen Seite $= z - vx$ (§. 349); so ist

$$x^2v^2+y^2 = z^2 - 2vxz + v^2x^2$$

$$y^2 = z^2 - 2vxz$$

$$2vxz = z^2 - y^2$$

$$x = (z^2 - y^2) : 2vz$$

Hier werden z und t nach Gefallen angenommen.

Es sey z. E. $z = 2, t = 3$, so ist $y = (9-1) : 6 = 8 : 6 = \frac{4}{3}$, $v = t - y = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$ und also $x = (4 - \frac{16}{9}) : \frac{20}{3} = (\frac{36}{9} - \frac{16}{9}) : \frac{20}{3} = \frac{20}{9} : \frac{20}{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Die 127. Aufgabe.

354. Zwey Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn ihr Product zu der Summe ihrer Quadrate gesetzet wird, ein vollkommenes Quadrat heraus kommet.

Auflösung.

Es sey die Summe der beyden Zahlen $2x$, ihre Differentz $2y$, die Seite des Quadrates $t+y$; so ist die grosse Zahl $x+y$, die kleine $x-y$, und demnach

x^2.

$x^2 y^2 + x^2 + 2xy + yy + x^2 - 2xy + yy$, d. i.
$3x^2 + y^2 = t^2 + 2ty + yy$

$3x^2 - t^2 = 2ty$

$2t$

$(3x^2 - t^2) : 2t = y$

Es sey $x = 4$, $t = 6$, so ist $y = (48 - 36 : 12 = 12 : 12 = 1$, folgends $x + y = 4 + 1 = 5$, $x - y = 4 - 1 = 3$.

Die 128 Aufgabe.

355. Eine Zahl von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn sie durch zwey bekandte Zahlen multipliciret wird, beyde Producte ein vollkommenes Quadrat sind.

Auflösung.

Es sey die eine gegebene Zahl $= a$, die andere b, die gesuchte x, das eine Quadrat y^2, das andere v^2, so ist

$ax = y^2$ | $bx = v^2$

$x = y^2 : a$ | $x = v^2 : b$

$y^2 : a = v^2 : b$

$by^2 = av^2$

$y^2 = av^2 : b$

$y = vV(a : b)$

Wenn demnach eine Rational-Zahl gefunden werden sol, muß $a:b$ ein vollkommenes Qvadrat seyn.

Es sey $a = 32$, $b = 8$; so ist $V(a:b) = 2$. Gesetzet $v = 5$, so ist $y = 10$, folgends $x = \frac{25}{8}$.

Die 129. Aufgabe.

356. Eine Zahl zu finden von der Beschaffenheit, daß, wenn sie durch zwey gegebene Zahlen multipliciret, und zu jedem Producte noch eine andere Zahl addiret wird, beyderseits ein vollkommenes Qvadrat herauskommet.

Auflösung.

Es seyn die ersten beyden gegebenen Zahlen a und b, die anderen c und d, die gesuchte x, die beyden Qvadrate yy und vv; so ist

$$ax + c = yy \qquad bx + d = vv$$

$$x = (yy - c) : a \qquad x = (vv - d) : b$$

$$(yy - c) : a = (vv - d) : b$$

$$byy - bc = avv - ad$$

$$byy = av^2 - ad \mp bc$$

$$y^2 = (av^2 - ad \mp bc) : b$$

$$y = V((av^2 - ad \mp bc) : b)$$

Wenn

Wenn ihr nun eine Rational-Zahl verlanget, setzet $a : b = m^2$, so ist

$$y^2 = m^2 v^2 - m^2 d + c$$

Setzet ferner für die Seite dieses Quadrates $t - mv$ oder $mv - t$ (§. 349), so ist

$$m^2 v^2 - m^2 d + c = m^2 v^2 - 2tmv + t^2$$

$$2tmv = t^2 + m^2 d - c$$

$$v = (t^2 + m^2 d - c) : 2tm$$

das ist, wenn ihr für m^2 seinen Werth wieder hinsetzet $v = (bt^2 + ad - bc) : 2tbm$.

Es sey $t = 4$, $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 3$, so ist $m^2 = 1 : 1 = 1$ und $m = 1$, folgends $v = (16 + 3 - 2) : 8 = 17 : 8 = 2\frac{1}{8}$ und $x = 289 : 64 - 3 = (289 - 192) : 64 = 97 : 64$.

Von den geometrischen Oertern.

Die 38. Erklärung.

357. Die Linie, durch welche eine undeterminirte Aufgabe geometrisch aufgelöset wird, heisset ein geometrischer Ort (Locus geometricus). Ins besondere nennet man es einen Ort an einer geraden Linie, wenn sie eine gerade Linie ist: einen Ort an dem Circul, wenn sie ein Circul ist; einen Ort an der Parabel, Hyper-

bel *ELLIPSI* u. s. w. wenn sie eine von diesen Linien ist.

Die 29. Erklärung.

358. Der Ort an einer geraden Linie wird ein einfacher Ort (Locus simplex); der an einem Circul ein ebener Ort (Locus planus); der an einer Parabel, Hyperbel und Ellipsi ein cörperlicher Ort (Locus solidus) genennet.

Die 130. Aufgabe.

359. Einen Ort an einer geraden Linie zu beschreiben.

Auflösung.

Einen Ort beschreiben heisset die Linie ziehen, welche der unbeterminirten Aufgabe ein Gnügen thut. Alle Oerter an einer geraden Linie lassen sich durch folgende Gleichungen vorstellen:

$$y = \frac{ax}{b} \qquad y = \frac{ax}{b} \mp c \qquad y = c - \frac{ax}{b}$$

Tab V. Fig. 45. Ziehet also eine gerade Linie AB und machet $AI = b$. Ziehet unter einem beliebigen Winckel $EI = a$. Wenn PM, pm &c. mit EI parallel gezogen werden; so sind AP, Ap &c. $= x$, PM, pm &c. $= y$. Denn (§. 184. *Geom.*).

AI:

AI : IE = AP : PM
$b : a = x : y$

$ax : b = y$

Verlängert EI in G, biß IG = c und ziehet durch G die Linie Dq mit AB, AD mit EG parallel. Wenn PM biß in Q verlängert wird; so ist DQ = AP = x und QM = $\frac{ax}{b} + c = y$.

Hingegen machet LG = b und GE = a, IG = c; so ist QM = $ax : b$ (§. 184. *Geom.*) und PM = $\frac{ax}{b} - c$.

Endlich sey AC = c und AD = b. Ziehet durch D die Linie FE mit AC parallel und machet DE = a. Ziehet ferner die Linie AL und mit ihr CB, hingegen NM mit AC parallel; so ist PN = $ax : b$ (§. 184. *Geom.*). folgends PM = MN − NP = $c - ax : b$. Tab. V. Fig. 46.

Die 131. Aufgabe.

360. Einen jeden Ort an einer Parabel zu beschreiben.

Auflösung.

Es können zwey Fälle vorkommen. Denn es beziehen sich die Linien x und y entweder auf die Höhlung, oder das erhabene der Parabel.

Tab. V. Fig. 47. Im ersten Falle sey $KD = PN = n$, $AK = p$, $DH = q$, $LH = r$, $DL = s$, der Parameter $= t$, $DQ = x$, $QM = y$; so ist (§. 184. *Geom.*).

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : s = x : \frac{sx}{q}$$

Demnach $AP = KP\,(= DN) - KA = \frac{sx}{q} - p$ und $PM = QM - QN - PN = y - \frac{rx}{q} - n$,

folgends weil $t.\ AP = PM^2$ (§. 217).

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = \frac{tsx}{q} - tp$$

das ist,

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$- \frac{tsx}{q} + tp$$

Tab. V. Fig. 48. Im anderen Falle sey $DK = PN = n$, $AK = p$, $DH = q$, $LH = r$, $DL = s$, $DQ = IM = y$, $QM = DI = x$; so ist (§. 184. *Geom.*).

DH

$DH : HL = DQ : QN$

$q : r = y : \frac{ry}{q}$

$DH : DL = DQ : DN$

$q : s = y : \frac{sy}{q}$

Demnach $AP = KP (= DN) \cdot AK = \frac{sy - pq}{q}$

$PM = QM - QN - NP = x - \frac{ry}{q} - n$, folgends

weil $t \cdot AP = PM^2$ (§. 217).

$$x^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2y^2}{q^2} - 2nx + \frac{2rny}{q} + n^2 = \frac{tsy - tp}{q}$$

das ist

$$x^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2y^2}{q^2} - 2nx + \frac{2rny}{q} + n^2 = 0$$

$$- \frac{tsy}{q} + tp.$$

Wenn ihr nun die Glieder einer gegebenen Gleichung mit denen Gliedern einer von den gefundenen vergleichet, so könnet ihr in jedem Falle finden, wie groß die Linien DK, AK, DH und LH in dem vorkommenden Falle anzunehmen sind, oder welche von ihnen gar weg bleiben, und solcher gestalt, den verlangten Ort beschreiben.

Z. E. Es sey $y^2 - ax = o$; so ist vermöge der ersten Gleichung

$$\begin{array}{llll} -2r = o & -2n = o, & -tf = -a, & n^2 + tp = o \\ \hline q & n = o & q & p = o \\ \hline r = o, q = s & & t = a & \end{array}$$

Tab. V. Fig. 47. Weil demnach $LH = o$, und $DK = o$; so fället die Linie DH auf KP und, weil $AK = o$, der Punct K in A, folgends DQ in AP und QM in PM, und ist weiter nichts nöthig, als daß mit dem Parameter a eine Parabel beschrieben wird. Denn so ist $AP = x$ und $PM = y$.

Wiederum es sey $y^2 - ay - bx + \frac{1}{4}aa = o$; so ist vermöge der ersten Gleichung

$$\begin{array}{lll} -2r = o & -2n = -a & -tf = -b \\ \hline q & n = \frac{1}{2}a & q \\ \hline r = o, q = s & & t = b \end{array}$$

$$n^2 + tp = \frac{1}{4}aa$$

$$\frac{1}{4}aa + bp = \frac{1}{4}aa$$

$$bp = o$$

$$p = o$$

Tab. V. Fig. 47. Tab. VI. Fig. 49. Weil demnach $LH = o$, so fället DH auf CL. Weil $KA = o$; so fället K in A. Solchergestalt wird mit dem Parameter b eine Parabel AMR beschrieben, auf der Axe AB in A

ein

ein Perpendicul $AL = \frac{1}{2}a$ aufgerichtet und LQ mit AB, QM aber mit LA parallel gezogen; so ist $LQ = x$, $QM = y$. Denn weil $PM = y - \frac{1}{2}a$; so ist

$$y^2 - ay + \tfrac{1}{4}aa = bx \text{ (§. 217).}$$

folgends $y^2 - ay - bx + \frac{1}{4}aa = o$

Es sey $y^2 - ay - bx - cc = o$; so ist vermöge der ersten Gleichung

$$-2r = o, \quad -2n = -a, \quad -tf = -b$$

$$\frac{q}{r = o, = f}, \quad n = \tfrac{1}{2}a, \quad \frac{q}{t = b}$$

$$n^2 + tp = -cc$$

$$\tfrac{1}{4}aa + bp = -cc$$

$$bp = -cc - \tfrac{1}{4}aa$$

$$p = -\frac{cc - \frac{1}{4}aa}{b}$$

Beschreibet mit dem Parameter b eine Parabel AMR und richtet in A auf die Axe AN eine Perpendicular Linie AH auf. Machet $AE = \frac{1}{2}a$, $AF = c$; so ist $EF = (V\,\frac{1}{4}aa + cc)$. Machet $EF = AI = AG$ und $AH = b$; ziehet die Linie HI und mit ihr GK parallel; so ist $AK = (cc + \frac{1}{4}aa) : b$. Wenn nun endlich EQ mit der Axe AN und DK, ingleichen QM mit EA

Tab. VI. Fig. 50.

EA parallel gezogen werden; so ist DQ = x und QM = y. Denn AP = EQ = AK + KP = $cc + \frac{1}{4}aa + \frac{x}{b}$ und PM = $y - \frac{1}{2}a$, folgends weil $PM^2 = t$. AP (§. 217).

$$y^2 - ay + \tfrac{1}{4}aa = cc + \tfrac{1}{4}aa + bx$$

das ist, $y^2 - ay - bx - cc = 0$.

Die 132. Aufgabe.

361. Einen Ort an einer Ellipsi zu beschreiben.

Auflösung.

Tab. VI. Fig. 51. Es sey in C der Mittelpunct der Axe, CK = p, KD = PN = n, DH = q, LH = r, DL = s, AC = CB = m, der Parameter = t, DQ = x, QM = y; so ist (§. 184. *Geom.*).

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : s = x : \frac{sx}{q}$$

Daher CP = DN - KC $\frac{sx}{q} - p$ und PM = QM - QN - PN = $y - \frac{rx}{q} - n$. Da nun in der Ellipsi (§. 239).

$$t : 2m = PM^2 : AP.PB$$

$$\text{und } PM^2 = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2$$

$$AP = m + \frac{sx}{q} - p \text{ und } PB = m - \frac{sx}{q} + p$$

$$\text{also } AP.PB = m^2 - p^2 + \frac{2psx}{q} - \frac{s^2x^2}{q^2};$$

$$\text{so ist } y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 =$$

$$\frac{tm^2 - tp^2}{2m} + \frac{2tpsx}{2mq} - \frac{ts^2x^2}{2mq^2}, \text{ folgends}$$

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 =$$

$$+ \frac{ts^2x^2}{2mq^2} - \frac{2tpsx}{2mq} + \frac{tp^2}{2m}$$

$$- \frac{tm^2}{2m}$$

Wenn ihr die vorgegebene Gleichungen, wie vorhin in der Parabel, mit dieser allgemeinen vergleichet; so werdet ihr in jedem Falle den Ort an der Ellipsi beschreiben können.

Z. E. Es sey $y^2 + \frac{cx^2}{b} + \frac{cdx}{b} - \frac{a^2c}{b} = o$; so

ist

$$-2r = 0 \qquad tf^2 = c \qquad -2n = 0 \qquad -2tpf = cd$$

$$\frac{}{q} \qquad \frac{}{2mq^2} \quad \frac{}{b} \qquad n = 0 \qquad \frac{}{2mq} \quad \frac{}{b}$$

$r = 0, q = f$ $\qquad t = c$ $\qquad -2p = d$

$$\frac{}{2m} \quad \frac{}{b} \qquad p = -\tfrac{1}{2}d$$

$$\frac{tp^2}{2m} - \frac{tm^2}{2m} = -\frac{a^2c}{b}$$

$$\frac{cp^2}{b} - \frac{cm^2}{b} = -\frac{a^2c}{b}$$

$$p^2 - m^2 = -a^2$$

$$\tfrac{1}{4}dd + aa = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}dd + aa)} = m$$

Tab. VI. Fig. 52. Richtet demnach auf der Linie AB in C die Linie CE = a perpendicular auf und machet KC = $\frac{1}{2}d$; so ist KE = $\sqrt{(\frac{1}{4}dd + aa)}$. Machet CA = CB = KE; so ist AB die Axe der Ellipsis. Machet ferner CH = b und CI = c; ziehet die Linie HI und mit ihr AG parallel; so ist GC der halbe Parameter. Machet endlich CO = CG und beschreibet über AO einen halben Circul; so ist CL die halbe kleine Axe und ihr könnet die Ellipsin ALB (§. 257) beschreiben, in welcher KP = x und PM = y. Denn CP = $x + \frac{1}{2}d$, AP = $\sqrt{(\frac{1}{4}dd + aa)} + x + \frac{1}{2}d$, PB = $\sqrt{(\frac{1}{4}dd + aa)} - x - \frac{1}{2}d$ und daher AP. PB = $aa - xx - dx$. Da nun $c : b$ = PM^2 : AB. PB = $y^2 : aa - xx - dx$ (§. 239); so ist

y^2

$$y^2 = \frac{a^2c}{b} - \frac{cx^2}{b} - \frac{cdx}{b}$$

folgendes $y^2 + \frac{cx^2}{b} + \frac{cdx}{b} - \frac{a^2c}{b} = 0$

Zusatz.

362. Wenn man $t = 2m$ setzet; so kommet die Gleichung für alle Oerter im Circul

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = a$$
$$+ \frac{f^2x^2}{q^2} - \frac{2pfx}{q} + p^2 - m^2$$

Die 133. Aufgabe.

363. Einen Ort an einer Hyperbel zu beschreiben.

Auflösung.

Es sey die Zwerch Axe $AB = 2m$, in C der Mittel-Punct, $CK = p$, $KD = PN = n$, D H $= q$, $LH = r$, $DL = f$, $DQ = x$, $QM = y$, der Parameter $= t$; so ist (§. 184. Geom.). Fig. 53.

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

DH

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : f = x : \frac{fx}{q},$$

Also ist $CP = DN (= KP) - CK = \frac{fx}{q} - p$ und

$$PM = QM - QN - PN = y - \frac{rx}{q} - n.$$

Nun ist $t : 2m = PM^2 : AP.PB$ (§. 260), und

$$PM^2 = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2$$

$$AP.PB = (CP - CA)(CP + CA) = CP^2 - CA^2$$
$$= \frac{f^2x^2}{q^2} - \frac{2pfx}{q} + p^2 - m^2$$

Derowegen $y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2$

$$= \frac{tf^2x^2}{2mq^2} - \frac{2tpfx}{2mq} + \frac{tp^2}{2m} - \frac{tm^2}{2m},$$ folgends

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$- \frac{tf^2x^2}{2mq^2} + \frac{2tpfx}{2mq} + \frac{tm^2}{2m}$$
$$- \frac{tp^2}{2m}$$

Wel-

Welche Gleichung eben so wie die vorigen gebrauchet wird (§. 360. 361).

Die 134. Aufgabe.

364. Einen Ort an einer Hyperbel zwischen ihren Asymptoten zu beschreiben.

Auflösung.

Es seyn SA und AR die Asymptoten einer Hyperbel. Ziehet DL mit der einen AR parallel und nach Belieben die Linie DH; hingegen KD, QM, LH, IR mit der anderen AS parallel. Es sey ferner KD = PN = v, KA = p, DH = q, LH = r, DL = s, DQ = x, QM = y, RI = m, AP = DL = s; so ist (§. 184. *Geom.*) Tab. VI. Fig. 54.

$$DH : HL = DQ : QN$$

$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

$$DH : DL = DQ : DN$$

$$q : s = x : \frac{sx}{q}$$

Derowegen ist AP = DN — AK = $\frac{sx}{q}$ — p

und PM = QM — PN — NQ = y — v — $\frac{rx}{q}$, folgends, weil AR. RI = AP. PM (§. 281).

$$ms = \frac{fyx}{q} - \frac{frx^2}{q^2} - py - \frac{fnx}{q} + prx + pn$$

$$qms = fyx - \frac{frx^2}{q} - qpy - fnx + prx + pnq$$

$$qm = yx - \frac{rx^2}{q} - \frac{qpy}{f} - nx + \frac{prx}{f} + \frac{pnq}{f}$$

$$yx - \frac{rx^2}{q} - \frac{qpy}{f} + \frac{prx}{f} + \frac{pnq}{f} = o$$

$$- nx - qm$$

Tab. VI. Fig. 55. Wenn alles wie vorhin bleibet, nur daß TM mit DH parallel gezogen und QM = DT = x, hingegen TM = QD = y angenommen wird; so findet man wie vorhin.

$$xy - \frac{ry^2}{q} - \frac{pqx}{f} + \frac{pry}{f} + \frac{pnq}{f} = o$$

$$= ny - mq$$

Welche beyde Gleichungen eben wie die vorigen gebrauchet werden.

Anmerckung.

365. Wenn man die gefundenen allgemeinen Gleichungen für die geometrischen Oerter gegen einander hält; so wird man folgende Regeln wahrnehmen / dadurch man urtheilen kan / ob eine gegebene Gleichung ein Ort an einer Parabel / oder Ellipsi, oder Hyperbel / oder einem Circul sey. Nemlich wenn xy in einer Gleichung vorhanden und 1. nur ein Qvadrat entweder von x / oder von y durch andere Grössen multipliciret vorkommet; so ist der Ort an einer Hyperbel zwischen ihren Asymptoten.

2. Wenn

2. Wenn das Qvadrat von x^2 oder y^2 durch das Qvadrat der halben Grösse multipliciret ist/ durch welche man xy multipliciret befindet; so ist der Ort an einer Parabel.

3. Wenn x^2 und y^2 beyde das Mehr-Zeichen + haben; so ist der Ort an einer Ellipsi oder einem Circul: und zwar siehet man/ daß er an einem Circul sey / wenn man $r : 2m = 1$ findet. 4. Endlich wenn x^2 und y^2 verschiedene Zeichen haben; so ist der Ort an einer Hyperbel/ die um ihre Axe beschrieben worden: welche beyde letztere Regeln 5. auch gelten/ obgleich xy fehlet. Hingegen ist 6. in diesem letzteren Falle in dem Orte an der Parabel auch x^2 nicht vorhanden.

Die 135. Aufgabe.

366. Eine cubische und biqvadratische Gleichung geometrisch auszuführen.

Auflösung.

1. Wenn in der Gleichung nur eine unbekandte Grösse vorhanden als y, so nimmet man noch eine x dazu und bringet die vorgegebene Gleichung auf geometrische Oerter.

2. Wenn man zwey von diesen Oertern gehührend beschreibet, daß nemlich die Linien x und y beyderseits auf einander fallen; so giebet der Durchschnitt beyder Oerter den verlangten Werth von y.

Z. E. Die vorgegebene Gleichung sey $y^3 + aby = a^2 c$; so ist $a : y = y^2 + ab : ac$

Setzet $a : y = y : x$

so ist 1. $ax = y^2$

daher $x = y^2 : a$
ingleichen $y : x = y^2 + ab : ac$
$= ax + ab : ac$
$= x + b : c$

II. $x^2 + bx = cy$

$ax = y^2$
$x^2 + bx = cy$

$ax = y^2$
$x^2 + bx = cy$

III. $ax - x^2 - bx = y^2 - cy$

IV. $ax + x^2 + bx = y^2 + cy$

Ferner $x^2 + bx = cy$
das ist $x^2 + by^2 = cy$

$y^3 + aby = a^2 c$
$axy + aby = a^2 c$

a

V. $y^2 + \frac{ax^2}{b} = \frac{acy}{b}$

VI. $xy + by = ac$

Solchergestalt findet man

I. $y^2 - ax = o$ an der Parabel.

II. $x^2 + bx - cy = o$ an der äusseren Parabel.

III. $y^2 + x^2 - cy + bx = o$ an dem Circul
$- ax$

IV. $y^2 - x^2 + cy - ax = o$ an der Hyperbel
$- bx$

V. $y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = o$ an der Ellipsi.

VI. $xy + by - ac = o$ an der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten.

Weil

Weil sich der Circul am leichtesten beschreiben lässet; so kan man ihn mit einem von den übrigen fünff Oertern beschreiben und dadurch den Werth von y finden.

Beschreibet demnach mit dem Parameter a eine Parabel (§. 220); so ist in ihr eine jede Abscisse DP = x, eine jede Semiordinate aber PM = y (§. 217). Tab. VII Fig. 56.

Für den Circul ist (§. 362).

$$\frac{2r = 0 \quad -2n = -c \quad -2p = b - a}{q \qquad n = \frac{1}{2}c \qquad p = \frac{a-b}{2}}$$

$$r = 0 \quad q = 1$$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\text{das ist } \tfrac{1}{4}c^2 + (\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)^2 = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + (\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)^2)} = m$$

Derowegen traget auf eine gerade Linie A B aus C in K $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$ und richtet in K die Linie KD = $\frac{1}{2}c$ perpendicular auf; so ist CD der Radius des Circuls DAMB. Wenn ihr selbigen beschrieben; so ziehet DP mit AB parallel und ihr habet DP = x, PM = y. Fig. 57.

Nun siehet man leicht, wie der Circul mit der Parabel zu vereinigen, damit die Linien DP und PM auf einander fallen. Richtet nemlich in D die Linie DK = $\frac{1}{2}c$ perpendicular auf; ziehet KQ mit DP parallel und machet KG = $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. Endlich beschreibet mit CD Fig. 56. 57.

durch den Scheitel-Punct D den Circul; so ist PM = y.

Denn $DP = KQ = \frac{y^2}{a}$ (§. 222) und daher

$CQ = KQ - KC = \frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$. Ferner

ist $QM = PM - DK = y - \frac{1}{2}c$, folgends

$$QC^2 = \frac{y^4}{a^2} - y^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{by^2}{a} - \frac{ab}{2} + \frac{1}{4}bb$$

$$QM^2 = y^2 - cy + \frac{1}{4}cc$$

$$CM^2 = \frac{y^4}{a^2} + \frac{by^2}{a} - cy + \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{ab}{2} + \frac{1}{4}b^2$$

$CM^2 = DG^2 = \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2$ subtr.

$$\frac{y^4}{a^2} + \frac{by^2}{a} - cy = 0$$

$\cdot y : a^2$

$$y^3 + aby - a^2c = 0$$

Auf eben solche Art kan man die Oerter an der Ellipsi und der Hyperbel beschreiben und den Circul darauf tragen, damit man den Werth von y findet: welches in folgenden Aufgaben durch wahre Exempel sol erkläret werden.

Es sey die vorgegebene Gleichung $y^4 + 2by^3 + a^2cy = a^3d$. Weil $y^4 + 2by^3 = a^3d - a^2cy$; so ist

a^2

$a^2 : y^2 = y^2 + 2by : ad - cy$

Setzet $a : y = b + y : x$

so ist I. $ax = by + y^2$

$ax - by = y^2$

daher $a^2 : ax - by = ax + by : ad - cy$

II. $a^3 d - a^2 cy = a^2 x^2 - b^2 y^2$

Setzet ferner für y^2 seinen Werth $ax - by$; so ist

$$a^3 d - a^2 cy = a^2 x^2 - ab^2 x + b^3 y$$

folgends III. $ad - cy - \frac{b^3 y}{a^2} = x^2 - \frac{b^2 x}{a}$

$$y^2 + by = ax$$

IV. $y^2 + by + ad - cy - \frac{b^3 y}{a^2} = x^2 + ax - \frac{b^2 x}{a}$

V. $y^2 + by - ad + cy + \frac{b^3 y}{a^2} = ax - x^2 + \frac{b^2 x}{a}$

Solchergestalt findet man

I. $y^2 + by - ax = o$ an der Parabel.

II. $y^2 - \frac{a^2 x^2}{b^2} - \frac{a^2 cy}{b^2} + \frac{a^3 d}{b^2} = o$ an der Hyperbel.

III. $x^2 - \frac{b^2 x}{a} + cy - ad + \frac{b^3 y}{a^2} = o$ an der äussern Parabel.

IV. $y^2 - x^2 - \frac{b^3}{a^2}y + \frac{b^2}{a}x + ad = o$ an der gleichs. seitigen Hyperbel-

$+ by - ax$

$- cy$

V. $y^2 + x^2 + \frac{b^3}{a^2}y - \frac{b^2}{a}x - ad = o$ an dem Cir-

$+ by - ax$ cul.

$+ cy$

Wenn man nun alle diese Oerter (§. 360. 362. 363) beschreibet und die an den Kegelschnitten mit dem an dem Circul, wie vorhin verknüpfet; so hat man der gegebenen Gleichung auf viererley Art ein Gnügen gethan.

Anmerckung.

367. Ich halte es für rathsamer/daß ich die vornehmsten Fälle/so vorkommen können/durch wahre Exempel erläutere.

Die 136. Aufgabe.

368. Zwischen zwey gegebenen Linien zwey mittlere Proportional-Linien zu finden.

Auflösung.

Tab. VII. Fig. 58. Es sey die kleine $= a$ von den gesuchten
die grosse $= b$ die kleine $= y$
die grosse $= x$

so ist

$a : y = y : x$ $\quad y : x = x : b$

I. $ax = y^2$ $\quad$ II. $by = x^2$

$a : y = x : b$ $\quad y^2 = ax$

III. $ab = xy$ $\quad$ IV. $by - y^2 = x^2 - ax$

$ax = y^2$ $\quad x^2 = by$

$x^2 = by$ $\quad \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}by$

V. $x^2 + ax = y^2 + by$ $\quad ax = y^2$

VI. $\frac{1}{2}x^2 + ax = \frac{1}{2}by + y^2$

VII. $ax - \frac{1}{2}x^2 = y^2 - \frac{1}{2}by$.

Solchergestalt bekommet man folgende Oerter:

I. $y^2 - ax = o$ an der Parabel.

II. $x^2 - by = o$ an der äusseren Parabel.

III. $xy - ab = o$ an der Hyperbel zwischen den Asymptoten.

IV. $y^2 + x^2 - by - ax = o$ an dem Circul.

V. $y^2 - x^2 + by - ax = o$ an der gleichseitigen Hyperbel.

VI. $y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}by - ax = o$ an der ungleichseitigen Hyperbel.

VII. $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}by - ax = o$ an der Ellipsi.

I. Wenn man demnach mit dem Parameter a eine Parabel DCM beschreibet; so ist der erste Ort beschrieben und $DQ = x$, $QM = y$. Tab. VII. Fig. 59.

Für den Circul ist (§. 362).

$-2n = o$	$-2n = -b$	$-2p = -a$	$n^2 + p^2 = m^2$
q	$n = \frac{1}{2}b$	$p = \frac{1}{2}a$	$\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2)} = m$
$r = 0, q = f$			

Tab.VII. Fig.60. Traget also auf eine gerade Linie BG aus C in K $\frac{1}{2}a$, richtet in K das Perpendicul KD $=\frac{1}{2}b$ auf; so ist CD $=\sqrt{(\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{4}a^2)}$ der Radius des Circuls DBMG und darinnen DQ $=x$, QM $=y$.

Tab.VII. Fig. 59. Weil nun der Punct D in den Scheitel-Punct der Parabel fället; so richtet auf der Axe DQ die Linie DK $=\frac{1}{2}b$ perpendicular auf, ziehet aus K die Linie KG mit DQ parallel, machet KC $=\frac{1}{2}a$ und beschreibet aus C durch D den Circul DBMG; so ist DQ $=x$ und QM $=y$ in dem gegebenen Falle.

Wenn man in der Gleichung $xy=ab$ vor x seinen Werth $y^2:a$ aus der Gleichung $ax=y^2$ setzet: so bekommet man $y^3=a^2b$, oder $y^3-a^2b=0$. Und diese Gleichung dienet füglich zu erweisen, daß die Linie y recht gefunden worden. Denn weil DK $=\frac{1}{2}b$ und KC $=\frac{1}{2}a$; so ist $DC^2=\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}bb$ (§. 172. *Geom.*). Wiederum weil QM $=y$ und der Parameter von der Parabel $=a$; so ist DQ $=$ KP $=y^2:a$ (§. 222) und daher CP $=y^2:a-\frac{1}{2}a$, hingegen PM $=y-\frac{1}{2}b$, folgends

$$CP^2=\frac{y^4}{a^2}-y^2+\frac{1}{4}aa$$

$$PM^2=y^2-by+\frac{1}{4}bb$$

$$CM^2=\frac{y^4}{a^2}-by+\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}bb$$

CM²

$CM^2 = CD^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$

$y^2 - by = o$

$y : a^2$

$y^3 - a^2b = o$

II. Für die Ellipsin ist §. 361).

$-2r = o \quad t = \frac{1}{2} \quad -2n = -\frac{1}{2}b$

$q \qquad 2m \qquad n = \frac{1}{4}b$

$r = o \quad q = s$

$t : 2m = 1 : 2$

$-2tp = -a \qquad n^2 - tm^2 + tp^2 = o$

$2m \qquad\qquad 2m \qquad 2m$

$p = a \qquad \frac{1}{16}b^2 - \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}a^2 = o$

$\frac{1}{16}b^2 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}m^2$

$\frac{1}{8}b^2 + a^2 = m^2$

$V(\frac{1}{8}b^2 + a^2) = m = t$

Demnach ist (§. 247) die halbe kleine Axe $= V(\frac{1}{16}b^2 + \frac{1}{2}a^2)$.

Machet $BC = a$ und richtet $AB = \frac{1}{4}b$ darauf perpendicular auf; so ist $AC = V(\frac{1}{16}b^2 + a^2)$. Richtet ferner auf AC die Linie $AD = \frac{1}{4}b$ perpendicular auf; so ist $DC = V(\frac{1}{8}b^2 + a^2)$, das ist, die halbe grosse Axe. Tab. VII. Fig. 61.

Glei-

Tab. VII Fig. 63. Gleichergestalt richtet auf EF $= \frac{1}{4}b$, EG $= \frac{1}{2}a$ perpendicular auf; so ist GF $= V(\frac{1}{16}b^2 + \frac{1}{4}a^2)$. Richtet ferner GH $= \frac{1}{2}a$ auf GF perpendicular auf; so ist FH $= V(\frac{1}{16}b^2 + \frac{1}{2}a^2)$, das ist, die halbe kleine Axe.

Traget nun auf die Linie AB aus A in E und aus E in B die halbe grosse Axe: ziehet durch E die Linie HI auf AB perpendicular, und machet EH und EI der halben kleinen Axe gleich; so könnet ihr (§. 257) die Ellipsin AHBI beschreiben. Machet ferner EL $= a$ und ziehet LD $=$ KL $= \frac{1}{4}b$ auf AB perpendicular, hingegen KG und DF mit AB parallel. Endlich traget auf KG aus K in C $\frac{1}{2}a$ und beschreibet aus C durch D einen Circul; so ist abermahl DQ $= x$ und QM $= y$. Denn weil PM $= y - \frac{1}{4}b$; so ist $PM^2 = y^2 - \frac{1}{2}by + \frac{1}{16}b^2$. Wiederum weil EP $= x - a$, AE $= V(\frac{1}{8}b^2 + a^2) = m$, folgends AP $= m + x - a$ und PB $= m - x + a$; so ist $AP.PB = m^2 + 2ax - x^2 - a^2 = \frac{1}{8}b^2 + 2ax - x^2$. Derowegen da $AP.PB : PM^2 = 2m : z = 2 : 1$ (§. 239); so ist

$$2y^2 - by + \tfrac{1}{8}b^2 = \tfrac{1}{8}b^2 + 2ax - x^2$$

$$y^2 - \tfrac{1}{2}by = ax - \tfrac{1}{2}x^2$$

Im Circul wird gefunden $y^2 - by = ax - x^2$. Wenn ihr diese beyde Gleichungen von einander abziehet; so bleibet übrig $-\frac{1}{2}by = -\frac{1}{2}x^2$. Demnach ist $by = x^2$, folgends $y : x = x : b$. Wenn ihr ferner für x^2 in der Glei-

Gleichung für den Circul by setzet; so bekommet ihr $y^2 = ax$ folgends $a : y = y : x$. Und solchergestalt sind die Linien DQ und QM richtig gefunden worden.

III. Für die gleichseitige Hyperbel ist (§. 363).

$2r = 0 \quad -r = -1 \quad -2n = b \quad 2p = -a$

$q \qquad 2m \qquad n = -\frac{1}{2}b \quad p = -\frac{1}{2}a$

$r = 0 \quad q = 1, r = 2m$

$n^2 + m^2 = p^2$

$m^2 = p^2 - n^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2$

$m = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$

Weil $\frac{1}{4}b^2$ von $\frac{1}{4}a^2$ abgezogen werden muß; so müsset ihr hier für b die kleine und für a die grosse Linie annehmen und solches auch bey dem Circul in acht nehmen, daß nemlich die Linien CK und KD mit einander verwechselt werden. Wenn ihr dieses in acht nehmet; so könnet ihr die verlangte Linien vermittelst der Hyperpel folgender gestalt finden. Uber $AB = \frac{1}{2}b$ beschreibet einen halben Circul. Darein traget $BC = \frac{1}{2}a$; so ist $AC = \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}a^2)}$ oder wenn a die grosse, b die kleine heissen solte, $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$, das ist, die halbe Axe.

Tab. VII. Fig. 60.

Tab. VII. Fig. 64.

Tra-

Tab. VII. Fig. 65. 60.

Traget nun auf eine gerade Linie aus G in A und B die halbe Axe, richtet in A die Linie AI = AG perpendicular auf, und beschreibet aus dem Mittelpuncte G durch I einen halben Circul FIf; so sind in F und f die Brenn-Puncte (§. 265) und ihr könnet die Hyperbel (§. 271) beschreiben. Wenn dieses geschehen, so machet $EG = \frac{1}{2}b$, richtet in E die Perpendicular-Linie EK auf, und machet $ED = DK = \frac{1}{2}a$. Ziehet durch D und K die Linien DQ und KP mit der Axe AL parallel. Traget aus K in C $\frac{1}{2}b$ und beschreibet aus C durch D einen Circul. Endlich ziehet aus M die halbe Ordinate LM; so ist $DQ = x$, $QM = y$.

Denn $LM = y + \frac{1}{2}a$ $EA = GE - AG = \frac{1}{2}b - \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}a^2)}$ oder $EA = \frac{1}{2}b - m$ und daher $AL = EA + EL = x + \frac{1}{2}b - m$, $BL = x + \frac{1}{2}b + m$. Also ist $LM^2 = y^2 + ay + \frac{1}{4}a^2$ und $AL \cdot LB = x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 - m^2 = x^2 + bx + \frac{1}{4}a^2$. Also ist

$$y^2 + ay + \tfrac{1}{4}a^2 = x^2 + bx + \tfrac{1}{4}a^2 \text{ (§. 290).}$$

$$y^2 + ay = x^2 + bx$$

Im Circul $y^2 - ay = bx - x^2$ *Subtr.*

demnach $2ay = 2x^2$

$$ay = x^2$$

folgends $y : x = x : a$

Setzet ferner in der Gleichung für den Circul ay für x^2; so bekommet ihr

$$y^2 - ay = bx - ay$$

das ist $y^2 = bx$

folgends $b : y = y : x$

IV. Auf eben diese Art kan man durch die ungleichseitige Hyperbel der Aufgabe ein Gnügen thun. Wollet ihr aber

V. Die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten gebrauchen; so richtet HD auf DI perpendicular auf, machet $DE = a$ und $EL = b$; theilet EL in zwey gleiche Theile in N oder machet $DK = \frac{1}{2}b$ und ziehet KN mit DE parallel. Traget aus K in C $\frac{1}{2}a$ und beschreibet aus C durch D den Circul DELM. Endlich beschreibet auch durch L die Hyperbel TMLS, und aus M, wo sie den Circul durchschneidet, ziehet QM mit DH oder auch PM mit DQ parallel; so ist $DQ = PM = x$, $DP = QM = y$. Denn vermöge der Hyperbel ist (§. 281).

Tab. VII Fig. 66. 60.

$$DE : DP = PM : EL$$
$$a : y = x : b$$

daher $y - a : a = b - x : x$

und $y - a : b - x = a : x$ (§. 142)

Vermöge des Circuls ist $y^2 - ay = bx - x^2$, und daher

$y - a : b - x = x : y$

daher $a : x = x : y$

Es ist aber auch $a : x = y : b$

Derowegen $x : y = y : b$.

Zusatz.

369. Wenn die Seite eines Würffels a ist, die Seite des doppelten Würffels $= y$; so ist $2a^3 = y^3$, oder, wenn $2a = b$, $a^2 b = y^3$. Also muß man zwischen der Seite des Würffels und der doppelten Seite zwey mittlere Proportional-Linien suchen; so ist die erste davon die Seite des doppelten Würffels.

Die 137. Aufgabe.

Tab. VIII Fig. 67.

370. Eine gerade Linie AB, die nach Belieben in C getheilet worden, noch ferner in D dergestalt zu theilen, daß $CD : DB = AC^2 : CD^2$.

Auflösung.

Es sey $AC = a$, $CB = b$, $CD = y$; so ist $DB = b - y$; folgends, weil $CD : DB = AC^2 : CD^2$,

$$y : b - y = a^2 : y^2$$

Setzet $a : y = y : x$

so ist 1. $y^2 = ax$

und $y : b - y = a^2 : ax$

$= a : x$ (§. 142)

II. $xy = ab - ay$

Ferner $y^2 : by - y^2 = a : x$ (§. 142)

$ax : by - y^2 = a : x$

$x : by - y^2 = 1 : x$

III. $x^2 = by - y^2$

$ax = y^2$

IV. $x^2 + ax = by$

$ax = y^2$

V. $x^2 + 2ax = y^2 + by$

und $x^2 = by - ay$

$ax = y^2$

VI. $ax - x^2 = 2y^2 - by$

Also bekommet man Gleichungen an folgenden Oertern, nemlich

I. $y^2 - ax = o$ an der Parabel.

II. $xy + ay - ab = o$ an der Hyperbel zwischen den Asymptoten.

III. $y^2 + x^2 - by = o$ an dem Circul.

IV. $x^2 + ax - by = o$ an der äusseren Parabel.

V. $y^2 - x^2 + by - 2ax = o$ an der gleichseitigen Hyperbel.

VI. $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}by - \frac{1}{2}ax = o$ an der Ellipsi.

Tab.VIII Fig.68. Beschreibet demnach mit dem Parameter a eine Parabel; so ist $DQ = x$, $QM = y$.

Für den Circul ist (§.362):

$$2r = 0 \qquad -2n = -b \qquad -2p = 0$$
$$q \qquad n = \tfrac{1}{2}b \qquad p = 0$$
$$r = 0 \quad q = f$$

$$n^2 - m^2 + p^2 = 0$$
$$n^2 = m^2$$
$$\tfrac{1}{4}b^2 = m^2$$
$$\tfrac{1}{2}b = m$$

Tab.VIII Fig.69. Wenn ihr demnach mit $AC = \frac{1}{2}b$ einen Circul beschreibet, und CD auf AB perpendicular aufrichtet; DL aber mit AB parallel ziehet; so ist ein jedes $DQ = x$ und ein jedes $QM = y$. Denn $PM = y - \frac{1}{2}b$, $AP = \frac{1}{2}b + x$, $PB = \frac{1}{2}b - x$. Daher $PM^2 = y^2 - by + \frac{1}{4}b^2$ und $AP.PB = \frac{1}{4}b^2 - x^2$, folgends

$$y^2 - by + \tfrac{1}{4}b^2 = \tfrac{1}{4}b^2 - x^2$$
$$y^2 - by = -x^2$$
$$y^2 + x^2 - by = 0$$

Tab.VIII Fig.68. Damit ihr nun x und y in unserem Falle findet; so setzet den Circul und die Parabel zusammen, dergestalt, daß der Punct D in die

die Scheitel der Parabel, und DL auf ihre Axe fället. Nemlich richtet in D auf die Axe DR ein Perpendicul $DC = \frac{1}{2}b$ auf, und beschreibet aus C durch D den Circul; so ist $DQ = x$ und $QM = y$ in unserem Falle.

Denn $DQ = CS = y^2 : a$ und $SM = y - \frac{1}{2}b$, $CM = \frac{1}{2}b$. Derowegen weil $CM^2 = CS^2 + SM^2$, und $CM^2 = \frac{1}{4}b^2$, $CS^2 = y^4 : a^2$ $SM^2 = y^2 - by + \frac{1}{4}b^2$; so ist

$$\frac{1}{4}b^2 = \frac{y^4}{a^2} + y^2 - by + \frac{1}{4}b^2$$

$$\frac{y^4}{a^2} + y^2 - by = 0$$

$$y^4 + a^2 y^2 - a^2 by = 0$$

$$y^3 + a^2 y - a^2 b = 0$$

daher $b - y : y = y^2 : a^2$

Weil die Gleichung der gegenwärtigen Aufgabe gar wenig unterschieden ist von derjenigen, die wir oben durch alle Kegelschnitte construiret (§. 368); so wollen wir die übrigen Kegel-Schnitte übergehen.

Die 138. Aufgabe.

371. Einen rechtwincklichten Triangel zu beschreiben, davon das eine Stücke C Tab. VIII Fig. 70. B von der grösten Seite gegeben wird, wel-

ches der Perpendicul CD abschneidet, der aus dem rechten Winckel D gefället wird, und zwar von der Beschaffenheit, daß die Summe der Quadrate von dem anderen Stücke AC und dem Perpendicul CD nebst einem Rectangulo aus dem Perpendicul CD in eine gegebene Linie FG gleich sey dem Rectangulo aus dem Stücke BC in das andere Stücke AC und eine gegebene Linie HI.

Auflösung.

Es sey $BC = a$, $FG = b$, $HI = c$, $AC = x$, $CD = y$; so ist

$$CB : DC = DC : AC$$
$$a : y = y : x$$

I. $ax = y^2$

$$AG^2 + CD + CD.FG = BC.(AC + HI)$$
$$x^2 + y^2 + by = ax + ac$$

II. $y^2 + by = ax + ac - x^2$

$$ax + by = ax + ac - x^2$$

III. $by = ac - x^2$

$$\tfrac{1}{2}by = \tfrac{1}{2}ac - \tfrac{1}{2}x^2$$
$$y^2 + by = ax + ac - x^2$$

IV. $y^2 + \tfrac{3}{2}by = ax + \tfrac{3}{2}ac - \tfrac{3}{2}x^2$

$$y^2 = ax$$

by

$$by = ac - x^2$$

V. $y^2 - by = ax - ac + x^2$.

Wir haben demnach Gleichungen für folgende Oerter:

I. $y^2 - ax = o$ an der Parabel.

II. $y^2 + x^2 + by - ax - ac = o$ an dem Circul.

III. $x^2 + by - ac = o$ an der äusseren Parabel.

IV. $y^2 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}by - ax - \frac{3}{2}ac = o$ an der Ellipsi.

V. $y^2 - x^2 - by - ax + ac = o$ an der Hyperbel

Wenn man in dem Orte an der äusseren Parabel $x^2 + by - ac = o$ für x^2 seinen Werth $y^4 : a^2$ setzet; so bekommet man

$$\frac{y^4}{a^2} + by - ac = o$$

daher $y^4 + a^2by - a^3c = o$;

Woraus zu ersehen, daß man eine biquadratische Gleichung zu construiren hat.

I. Wenn man mit dem Parameter a eine Parabel beschreibet; so ist der Ort an der Parabel vorhanden.

II. Für den Ort an dem Circul ist

$$\frac{2r = 0}{q} \qquad \frac{-2n = b}{n = -\frac{1}{2}b} \qquad \frac{-2p = -a}{p = \frac{1}{2}a}$$

$$r = 0 \quad q = f$$

$$n^2 + p^2 - m^2 = -ac$$

$$n^2 + p^2 + ac = m^2$$

$$\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2 + ac = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{4}a^2 + ac)} = m$$

Tab. VIII Fig. 71. Machet demnach RI $= \frac{1}{2}b$ und richtet in I perpendicular auf HI $= \frac{1}{2}a$; so ist HR $= \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb)}$. Verlängert RH in L biß RL $= a$, und in O, biß RO $= c$. Beschreibet über OL einen halben Circul; so ist das Perpendicul CR $= \sqrt{ac}$ (§. 210. *Geom.*), folgends CH $= \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb + ac)}$ der Radius des Circuls. Wenn ihr also aus C mit CH den Circul beschrieben und durch C die Linie AB mit OL parallel gezogen, so machet CK $= \frac{1}{2}a$. Richtet in K das Perpendicul KD $= \frac{1}{2}b$ auf, und ziehet die Linie DQ mit AB parallel; so ist der Ort an dem Circul beschrieben, und der Punct D der Ursprung von x, hingegen y wird biß an die Linie DQ gezogen.

Wenn ihr nun ferner damit den Ort in der Parabel verknüpffen, und dadurch x und y in dem gegebenen Falle determiniren wollet; so nehmet DQ für die Axe an und beschreibet darum

um

um mit dem Parameter a die Parabel. Wo sie den Circul durchschneidet, nemlich aus dem Puncte M, lasset ein Perpendicul QM auf die Linie DQ fallen; so ist $DQ = x$, $QM = y$. Machet ihr nun $QS = a$ und ziehet die Linien DM und SM; so ist DMS der verlangte Triangel.

Denn $DQ = KP = \frac{y^2}{a}$ und daher $CP \frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}a$.

Ferner $PM = PQ + QM = \frac{1}{2}b + y$. Derowegen

$$CP^2 = \frac{y^4}{a^2} - y^2 + \frac{1}{4}a^2$$

$$PM^2 = y^2 + by + \frac{1}{4}bb$$

$$CM^2 = \frac{y^4}{a^2} + by + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$$

$$CH^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + ac$$

$$\frac{y^4}{a^2} + by - ac = 0,$$

$$a^2$$

$$y^4 + a^2by - a^3c = 0$$

welches die biquadratische Gleichung ist, die man construiren sollen.

Wie diese Gleichung durch die übrigen Kegelschnitte construiret wird, ist aus der 136. Aufgabe (§. 368) abzunehmen.

Die 139. Aufgabe.

372. Eine allgemeine Regel zu finden alle cubische und biquadratische Gleichungen zu construiren.

Auflösung.

Es sey MAN eine Parabel und ihre Axe AO, Tab VIII. Fig. 72. mit welcher AP parallel, darauf DH perpendicular gezogen ist. Aus H als dem Mittelpuncte beschreibet durch A den Circul AMN. Nun sey $AD = b$, $DH = d$, $AQ = c$; so ist $AH^2 = dd + bb$. Es sey ferner $PM = x$, der Parameter der Parabel $= a$; so ist $OM = x + c$ und $KM = x + d$. Da nun (§. 233)

$$a : OM + AQ = PM : AP\,(= QO),$$
$$a : x + 2c = x : \frac{x^2 + 2cx}{a},$$

folgends $DP = HK = \frac{x^2 + 2cx}{a} - b$;

so ist $HK^2 = \frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} - \frac{4bcx}{a} + bb$.

Und weil $KM^2 = x^2 + 2dx + dd$; so ist

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} - \frac{4bcx}{a} + bb + x^2 + 2dx + dd = bb + dd,$$

das ist

x^4

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{4bcx}{a} = 0$$

$$= \frac{2bx^2}{a} + 2dx$$

$$+ x^2$$

$$\frac{x}{a^2}$$

$$x^3 + 4cx^2 + 4c^2x - 4abc = 0$$

$$- 2abc + 2a^2d$$

$$+ a^2x$$

Hieraus ist klar, daß, wenn das andere Glied das Mehr Zeichen + hat, die wahren Wurtzeln zur Rechten fallen. Vergleichet demnach mit dieser Gleichung folgende $x^3 + px^2 + qx + r = o$; so findet ihr

$c = \frac{1}{4}p$	$4c^2 - 2ab + a^2 = q$	$4c^2 - 2ab + a^2 = -q$
	$4c^2 + a^2 - q = 2ab$	$4c^2 + a^2 + q = 2ab$
	$\frac{4}{16}p^2 + a^2 - q = 2ab$	$\frac{4}{16}p^2 + a^2 + q = 2ab$
	$\frac{p^2}{8a} + \frac{1}{2}a - \frac{q}{2a} = b$	$\frac{p^2}{8a} + \frac{1}{2}a + \frac{q}{2a} = b$

$2a^2d - 4abc = r$	$2a^2d - 4abc = -r$
$2a^2d = 4abc + r$	$2a^2d = 4abc - r$

$$d = \frac{2bc}{a} + \frac{r}{2a^2} \qquad d = \frac{2bc}{a} - \frac{r}{2a^2}$$

das ist

$$d = \tfrac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \pm \frac{pq}{4a^2} + \frac{r}{2a^2} \qquad d = \tfrac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} + \frac{pq}{4a^2} - \frac{r}{2a^2}$$

Gesetzet nun $PN = x$, und das übrige bleibe wie vorhin; so ist $NR = PN - RP = PN - DH = x - d$, $NO = x - c$, $PM = x - 2c$, $NR^2 = x^2 - 2dx + d^2$ und, weil (§. 233)

$$a : ON + AQ = PM : AP$$

$$a : x = x - 2c : x^2 - 2cx$$

$$\frac{x^2 - 2cx}{a}$$

auch daher $DP = HR = \frac{x^2 - 2cx - b}{a}$, demnach

$$HR^2 = \frac{x^4}{a^2} - \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} + \frac{4bcx}{a} + b^2$$

folgends, da $HN^2 = HR^2 + NR^2$ (§ 172 *Geom.*),

$$\frac{x^4}{a^2} - \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} + \frac{4bcx}{a} + b^2 + x^2 - 2dx + dd = bb + dd$$

$$\frac{x^4}{a^2} - \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} + \frac{4bcx}{a} = 0$$

$$- \frac{2bx^2}{a} - 2dx$$

$$+ x^2$$

$$\frac{x}{a^2}$$

$$x^3$$

$$x^3 - 4cx^2 + 4c^2 x + 4abc = 0$$
$$- 2abx - 2a^2 d$$
$$+ a^2 x$$

Hieraus erhellet, daß, wenn das andere Glied das Minder-Zeichen — hat, die wahren Wurtzeln zur Lincken fallen. Man vergleiche demnach mit der gefundenen Gleichung folgende $x^3 - px^2 \mp qx \mp r = 0$; so ist

$-p = -4c$ | $4c^2 - 2ab + a^2 = q$ | $4c^2 - 2ab + a^2 = -q$

$\frac{1}{4}p = c$ | $\frac{1}{16}p^2 + a^2 - q = 2ab$ | $\frac{1}{16}p^2 + a^2 + q = 2ab$

$p^2 + \frac{1}{2}a - q = b$ | $p^2 + \frac{1}{2}a + q = b$

$\frac{p}{8a}$ | $\frac{b}{2a}$ | $\frac{p}{8a}$ | $\frac{b}{2a}$

$4abc - 2a^2 d = r$ | $4abc - 2a^2 d = -r$

$4abc - r = 2a^2 d$ | $4abc + r = 2a^2 d$

$2bc - r = d$ | $2bc + r = d$

$\frac{1}{a}$ | $\frac{r}{2a^2}$ | $\frac{1}{a}$ | $\frac{r}{2a^2}$

$\frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} + \frac{pq}{4a^2} - \frac{r}{2a^2} = d$ | $\frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} + \frac{pq}{4a^2} + \frac{r}{2a^2} = d$

Also ist in allen vollständigen cubischen Gleichungen

$AQ = \frac{1}{4}p$

$DA = \frac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} + \frac{q}{2a}$

$DH =$

$$DH = \tfrac{1}{4}p + \sqrt{p^3/16a^2 \mp pq/4a^2} \mp r/2a$$

Nemlich q hat allezeit in der Regel $-$, wenn es in der Gleichung $+$ hat, und hingegen $+$, wenn hier $-$ ist. Hingegen ist beständig $+ r$, ausser wenn in der Gleichung p und r verschiedene Zeichen haben.

Wenn einige Glieder in der Gleichung fehlen, so müssen auch aus der Gleichung alle weggelassen werden, darinnen die dazu gehörige Buchstaben zu finden. Z. E. Wenn das andere Glied fehlet, so ist $\frac{1}{4}p = o$, und daher $DA = \frac{1}{2}a \mp \sqrt{q/2a}$ und $DH = r/2a^2$.

Wenn ihr das Quadrat von dem Radio des Circuls MH oder HN setzet $bb + dd \mp af$; so lässet sich die Gleichung auf keine cubische bringen, sondern sie bleibet biquadratisch. Wenn ihr nun damit die Gleichung $x^4 + px^3 \mp qx^2 + rx + f = o$ vergleichet; so bleibet alles, wie vorhin: nur wird gefunden

$f = a^3 f$ und daher $f : a^3 = f$.

Solchergestalt werden die biquadratischen Gleichungen durch eben diese Regel construiret; nur daß der Radius des Circuls $(= \sqrt{(bb + dd \mp af)})$ anders gefunden wird, wie bereits in einem Exempel in der vorhergehenden Aufgabe (§. 731) gezeiget worden.

An-

Anmerckung.

373. Diese Regel nennet man insgemein die Backerische Central Regel/ weil sie Thomas Backer / ein Engelländer/ gefunden. Ich halte es vor dienlich/ ihren Gebrauch durch folgende Aufgabe zu erläutern.

Die 140. Aufgabe.

374. In einem rechtwincklichten Triangel ABC wird gegeben das Stücke von der Hypothenuse BD und das von der Grund-Linie EC nebst dem Perpendicul AB: man sol die Seiten BC und AC finden. Tab. VIII. Fig. 73.

Auflösung.

Es sey $AB = a$ $DC = x$
$BD = b$ $AE = y$
$EC = c$ so ist $BC = b + x$
$AC = c + y$

$$CD : DB = CE : EA$$
$$x : b = c : y$$
$$xy = bc$$
$$y = bc : x$$
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$b^2 + 2bx + x^2 = a^2 + c^2 + 2cy + y^2$$
$$= a^2 + c^2 + \frac{2bc^2}{x} + \frac{b^2c^2}{x^2}$$

$$b^2x^2 + 2bx^3 + x^4 = a^2x^2 + c^2x^2 + 2bc^2x + b^2c^2$$
$$\text{das ist, } x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 - 2bc^2x - b^2c^2 = 0$$
$$- a^2x^2$$
$$- c^2x^2$$

Nehs

Nehmet a für den Parameter an und beschreibet eine Parabel. Weil

$p = 2b, q = b^2 - a^2 - c^2, r = -2bc^2, s = -b^2c^2$; so ist in der Bakerischen Central-Regel.

Tab. VIII. Fig. 72.

$$AQ = \frac{1}{2}b \quad DA = \frac{1}{2}a + \frac{4b^2}{8a} - \frac{b^2}{2a} + \frac{1}{2}a + \frac{c^2}{2a} - \frac{}{2a}$$

$$= a + \frac{c^2}{2a}$$

$$DH = \frac{1}{2}b + \frac{8b^3}{16a^2} - \frac{2b^3}{4a^2} + \frac{2a^2b}{4a^2} + \frac{2bc^2}{4a^2} - \frac{2bc^2}{2a^2}$$

$$= b - \frac{bc^2}{2a^2}$$

Tab. VIII. Fig. 74. Beschreibet demnach mit dem Parameter a eine Parabel, machet $aQ = \frac{1}{2}b$ und in der Linie QP, welche mit der Axe parallel gezogen, $AD = a + \frac{c^2}{2a}$ die Perpendicular-Linie

$DH = b - \frac{bc^2}{2a^2}$. Wie die Linien $c^2 : 2a$ und b $c^2 : 2a^2$ gefunden werden, ist aus den oben gefundenen Werthen von dergleichen Linien klar: nemlich $c^2 : 2a$ ist die halbe dritte Proportional-Linie zu a und c, hingegen $bc^2 : 2a^2$ ist die vierdte zu a, b und $c^2 : 2a$. Durch H und A ziehet die Linie CB und machet $AB = a$,

AC

$AC = b^2c^2 : a^3$, welches die vierdte Proportional-Linie zu a, b und $bc^2 : a^2$ ist. Uber CB beschreibet einen halben Circul und richtet aus A den Perpendicul AE auf. Endlich beschreibet aus H mit HE einen Circul, welcher die Parabel in M durchschneidet; so ist PM $= x$.

Denn $AD^2 = a^2 + c^2 + \frac{c^4}{4a^2}$

$$DH^2 = b^2 - \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{b^2c^4}{4a^4}$$

$$AH^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{c^4}{4a^2} - \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{b^2c^4}{4a^4}$$

und $EH^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{c^4}{4a^2} + \frac{b^2c^4}{4a^4}$

Ferner ist (§. 233)

$a : OM + aQ = PM : PA$

$a : x + b = x : x^2 + bx$

$$\text{daher } DP = HR = \frac{x^2 + bx}{a} - \frac{a - c^2}{2a}$$

und weil $RM = x + b - \frac{bc^2}{a^2}$, so ist

$$RM^2 = x^2 + 2bx + bb - \frac{bc^2x}{a^2} - \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{b^2c^2}{4a^4}$$

$$HR^2 = \frac{x^4}{a^2} + \frac{2bx^3}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^2} - 2x^2 - 2bx + \frac{a^2 - c^2x^2}{a^2} - \frac{bc^2x}{a^2} + c^2 + \frac{c^4}{4a^2}$$

Wenn man nun von der Summe dieser beyden Quadrate das Quadrat von EH abziehet; so bleibet

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{2bx^3}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^2} - \frac{2bc^2x}{a^2} - \frac{b^2c^2}{a^2} = 0$$
$$- x^2$$
$$- c^2x^2$$
$$\frac{}{a^2}$$

übrig, und demnach ist

$$x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 \quad 2bc^2x - b^2c^2 = 0$$
$$- a^2x^2$$
$$- c^2x^2$$

ENDE des ersten Theiles.

Der

Der andere Theil
Von den
Anfangs-Gründen
Der
Differential-Rechnung.

Die 1. Erklärung.

1.

Die Differential-Rechnung ist eine Wissenschaft aus einer gegebenen endlichen Grösse eine unendlich kleine zu finden/ deren unendliche zusammen genommen ihr gleich werden.

Anmerckung.

2. Der Herr Geheime Rath von Leibnitz hat diese Rechnung gefunden. Es ist aber der tiefsinnige Geometra *Isaac Newton* in Engelland auf eben dergleichen Gedancken kommen/ wie wohl er eine andere Manier hat/ die unendlich kleinen Grössen zu bezeichnen und auch die Rechnung selbst mit einem anderen Nahmen nennet/ nemlich Methodum Fluxionum.

Die 2. Erklärung.

3. Eine unendlich kleine Grösse ist diejenige, welche so ein geringer Theil von der anderen ist, daß er mit ihr nicht verglichen werden kan.

Der 1. Zusatz.

4. Dannenhero ist sie in Ansehung der-

jenigen Grösse, mit welcher sie nicht verglichen werden kan, für nichts zu halten.

Der 2. Zusatz.

5. Folgends wenn eine unendlich kleine Grösse zu einer anderen addiret, oder von ihr subtrahiret wird, so ist in dem ersten Falle die Summe, in dem anderen die Differentz der gegebenen gleich zu achten, das ist, eine unendlich kleine Grösse kan eine endliche weder vermehren noch vermindern.

Die 1. Anmerckung.

6. Mercket aber wohl / daß eine unendlich kleine Grösse nur in Ansehung einer anderen für nichts zu achten; in sich aber nicht nichts ist. Denn bildet euch ein / ihr wollet die Höhe eines Berges messen und indem ihr über der Arbet begriffen wäret / fagte der Wind ein Körnlein Sand von der Spitze weg. So wäre der Berg um den Diameter eines Sand-Körnleins niedriger worden. Allein da die Ausmessung der Höhe eines Berges so beschaffen ist / daß die Höhe einerley gefunden wird / ob das Sand-Körnlein liegen bleibet / oder von dem Winde weggejaget wird: so kan man das Sand-Körnlein in Ansehung eines grossen Berges für nichts und also seine Grösse in Ansehung der Höhe des Berges für unendlich kleine halten. Dieses hat man schon längst überall in acht genommen / wo man die Geometrie bey cörperlichen Dingen in der Natur anbringet. Also setzen wir in der Astronomie / der Diameter der Erde sey in Ansehung der Weite von der Sonne und noch mehr der Fixsterne für einen Punct oder unendlich kleine zu halten / weil die erste Bewegung der Sterne sich eben so verhalten würde / wenn die Erde würcklich ein untheilbahrer Punct wäre. So halten wir in den Mond-Finsternissen die Erde für eine vollkommene Kugel und also die Höhen der Berge in Ansehung des Diameters der Erde für unendlich kleine oder für nichts; weil

der

der Schatten der Erde sich auf dem Monden nicht anders darstellen würde / wenn die Berge nicht da wären und die Erde die völlige Gestalt einer Kugel hätte. Da man nun auch in der Geometrie grossen Vortheil davon hat / wenn man die Grössen in unendlich kleine Theile in Gedancken theilet / das ist / in so kleine / die in Ansehung ihrer für nichts zu halten sind / indem man daraus die endlichen Grössen öffters determiniren und ihre verborgene Eigenschaften auf die allerleichteste Manier finden kan: wer wil es den Geometris verdencken / daß sie dergleichen vornehmen?

Die 2. Anmerckung.

7. Ihr wisset aus der gemeinen Geometrie / daß eine Linie beschrieben wird / wenn ein Punct sich durch einen gewissen Raum beweget; eine Fläche / wenn eine Linie; ein Cörper / wenn eine Fläche sich beweget. Also erwachsen die Grössen / indem unendlich viel kleine Theile nach einander anwachsen. Und in dieser Absicht nennet sie *Newton* Fluxionen oder Fluxiones.

Die 3. Erklärung.

8. Wenn die unendlich kleinen Grössen als der Unterscheid zweyer endlichen angesehen werden, nennet man sie Differential-Grössen.

Die 4. Erklärung.

9. Differentiiren heisset die Differential-Grösse von einer gegebenen endlichen finden.

Die 5. Erklärung.

10. Die Grössen / welche immer wachsen, oder abnehmen, indem andere unverändert bleiben / heissen veränderliche; die anderen aber unveränderliche

Grössen. Also sind in einer Parabel die Abscissen und Semiordinaten veränderliche Grössen, der Parameter aber ist eine unveränderliche. Denn indem jene beyden beständig wachsen, bleibet dieser unverändert (§. 217. *P. I.*).

Zusatz.

11. Da nun die Differential-Grössen die unendlich kleinen Theile sind, welche nach und nach anwachsen, indem sie erzeuget werden (§. 7. 8); so haben die unveränderlichen Grössen keine Differential-Grösse.

Der 1. willkührliche Satz.

12. Nennet die veränderlichen Grössen mit den letzten Buchstaben des Alphabets, x, y, z; die unveränderlichen aber mit den ersten, a, b, c &c.

Der 2. willkührliche Satz.

13. Die Differential-Grösse von x nennet dx, die von y nennet dy und so weiter.

Der 1. Zusatz.

14. Also ist da, oder db, oder $dc = 0$ (§. 11).

Der 2. Zusatz.

15. Und die Differential-Grösse von $x + y - a$ ist $dx + dy$; die von $x - y + a$

aber

aber $dx - dy$. Demnach ist es leicht die Grössen, welche zu einander addiret, oder von einander subtrahiret sind, zu differentiiren.

Die 1. Aufgabe.

16. Zwey Grössen, die einander multipliciren als xy zu differentiiren.

Auflösung.

1. Multipliciret die Differential-Grösse der einen veränderlichen Grösse in die andere veränderliche Grösse.

2. Die beyden Producte addiret zusammen, so kommet die Differential-Grösse von xy heraus $xdy + ydx$.

Beweiß.

Lasset x und y um ihre halbe Differential-Grösse vermehret und vermindert werden, so kommet im ersten Falle $x - \frac{1}{2}dx$ und $y - \frac{1}{2}dy$, im anderen Falle $y + \frac{1}{2}dy$ und $x + \frac{1}{2}dx$. Multipliciret beyde durch einander in beyden Fällen, so bekommet ihr $xy - \frac{1}{2}ydx - \frac{1}{2}xdy + \frac{1}{4}dxdy$ und $xy + \frac{1}{2}ydx + \frac{1}{2}xdy + \frac{1}{4}dxdy$. Wenn ihr beyde Producte von einander abziehet, so bleibet für die Differential-Grösse des Rectanguli xy übrig $xdy + ydx$. W. Z. E.

Der 1. Zusatz.

17. Wenn viel Grössen einander multi-

pliciren, so dörffet ihr nur zwey oder mehre nach einander als eine ansehen und ihr könnet sie nach der gegebenen Regel differentiiren. Z E Es sey xyv zu differentiiren, so ist die Differential-Grösse $xydv + xvdy + yvdx$. Denn es sey $xy = t$, so ist $xyv = tv$, folgends $d(xyv) = tdv + vdt$. Nun ist $d(xy) = xdy + ydx$. Derowegen wenn ihr für t und dt die gehörigen Werthe setzet, so findet ihr $tdv + vdt = xydv + vxdy + vydx$.

Der 2. Zusatz.

18. Dannenhero findet ihr ferner die Differential-Grösse einer Potentz, wenn ihr ihren Exponenten um 1 vermindert, und als denn die erniedrigte Potentz in ihren unveränderlichen Exponenten und die Differential-Grösse der Wurtzel multipliciret. Nemlich $d(x^2) = 2xdx$, $d(x^3) = 3x^2dx$ und überhaupt $d(x^m) = mx^{m-1}dx$.

Der 3. Zusatz.

19 Die Differential-Grösse von ay ist $ady + ydx$. Nun ist $da = 0$ (§. 14). Derowegen ist $d(ay) = ady$.

Der 4. Zusatz.

20. Weil $\sqrt[m]{x} = x^{1:2}$ und überhaupt $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ (§ 42. *Part. 1.*), so ist die Differential-Grösse von einer Irrational-Grösse $(n:m)$

$(n:m)\, x^{n:m-1}\, dx = (n:m)\, x^{(n-m):m}\, dx = (n:m)\sqrt[m]{x^{n-m}}\, dx$.

Der 5. Zusatz.

21. Wiederum weil $1:x = x^{-1}$, $1:x^2 = x^{-2}$ und überhaupt $1:x^m = x^{-m}$, so ist die Differential-Grösse von $1:x$, und $1:x^2$, ingleichen $1:x^m = -x^{-2}\, dx$, $-2x^{-3}\, dx$, und $-m\, x^{-m-1}\, dx$.

Anmerckung.

22. Daß $1:x = x^{-1}$, $1:x^2 = x^{-2}$, $1:x^3 = x^{-3}$ u. s. w. können ihr bald begreiffen / wenn ihr nur bedencket / es gehen die Exponenten in einer arithmetischen Verhältnis fort / indem die Dignitäten in einer geometrischen fortschreiten. Nun seyn die Dignitäten $x^2, x, 1, 1:x, 1:x^2, 1:x^3$ / so sind die Expon. 2. 1. 0. — 1. — 2. — 3. Und daher ist eben $x^0 = 1$.

Der 6. Zusatz.

23. Endlich weil $1:\sqrt{x} = 1:x^{1:2} = x^{-1:2}$, $1:\sqrt{x^3} = 1:x^{3:2} = x^{-3:2}$ und überhaupt $1:\sqrt[m]{x^n} = 1:x^{n:m} = x^{-n:m}$; so sind die Differential-Grössen von dergleichen Grössen — $\frac{1}{2}x^{-3:2}\, dx$, — $\frac{3}{2}\, x^{-5:2}\, dx$ und überhaupt $-(n:m)\, x^{-n:m-1}\, dx = -(n:m)\, x^{-n-m:m}\, dx = -\frac{n\, dx}{m\sqrt[m]{x^{n+m}}}$

Die 2. Aufgabe.

24. Zwey Grössen, die einander dividiren, $x : y$ zu differentiiren.

Auflösung.

Es sey $x : y = v$

so ist $x = vy$

$dx = vdy + ydv$ (§. 16).

$dx - vdy = ydv$

das ist, $dx : y - xdy : y^2 = dv$
oder $(ydx - xdy) : y^2 = dv$

Regel.

(1) Multipliciret die Differential-Grösse des Zehlers in den Nenner und (2) des Nenners in den Zehler. (3) Ziehet das letzte Product von dem ersten ab. (4) Das übrige dividiret durch das Quadrat des Nenners.

Zusatz.

25. Wenn im Zehler und Nenner viel veränderliche Grössen enthalten sind, so könnet ihr sie gleichfals nach den gegebenen Regeln differentiiren, wenn ihr zwey als eine ansehet. Denn es sey $xy : vz$ zu differentiiren. Setzet $xy = t$ und $vz = f$; so ist $d(xy : vz) = (fdt - tdf) : f^2$. Nun ist $dt =$

xdy

$xdy+ydx$ und $ds=vdz+zdv$ (§. 16). Derowegen ist $/dt-tds=vzxdy+vzydx-vxydz-xyzdv$, folgends $d(xy:vz)=(vzxdy+vzydx-xyzdv-xyvdz):v^2z^2$.

Die 1. Anmerckung.

26. Wie wir die Regel in der Division gefunden / hättet ihr auch alle Regeln finden können/ die in dem 4. 5. und 6. Zusatze der vorhergehenden Aufgabe auf eine andere Art hergeleitet worden/. Denn setzet

$$\sqrt[m]{x^n}=v$$

so ist $x^n=v^m$

$$nx^{n-1}dx=mv^{m-1}dv \text{ (§. 18).}$$

$$nx^{n-1}dx:mv^{m-1}=dv$$

Nun ist $v^{m-1}=v^m:v=x^n:\sqrt[m]{x^n}$, folgends

$nx^{n-1}dx:mv^{m-1}=nx^{n-1}dx\sqrt[m]{x^n}:mx^n=(n:m)x^{-1}dx\sqrt[m]{x^n}=(n:m)x^{-1}x^{n:m}dx=(n:m)x^{n:m-1}dx$, wie ihr es (§. 20) gefunden.

Die 2. Anmerckung.

27. Damit ihr den Nutzen der Differential-Rechnung in der höheren Geometrie sehet/ so muß ich zeigen/ wie die Eigenschafften der krummen Linien dadurch erfunden werden.

Von den Tangentibus der krummen Linien oder den geraden Linien, die sie berühren.

Die 6. Erklärung.

Tab. IX. Fig. 75.

28. Weil der Punct, so die krumme Linie beschreibet, in seiner Bewegung seine Direction beständig ändert (§. 218. *Geom.*); so kan man sich die krummen Linien vorstellen, als wenn sie aus unendlich kleinen geraden Linien zusammen gesetzt, und daher ein Polygon von unzehlich unendlich kleinen Seiten wären. Wenn ihr nun setzet, daß eine von diesen Seiten Mm in eine endliche gerade TM verlängert wird; so ist selbige der Tangens der krummen Linie.

Zusatz.

29. Derowegen zeiget der Tangens die direction, welche der Punct, so die krumme Linie beschrieben, an jedem Theile derselben gehabt.

Die 7. Erklärung.

Tab. IX. Fig. 76.

30. Der SUBTANGENS ist die Linie PT, welche zwischen dem Tangente TM und der Semiordinate PM enthalten ist.

Die 8. Erklärung.

Tab. IX. Fig. 75.

31. Wenn ihr in dem Puncte der Berührung M eine Perpendicular-Linie MH aufrichtet, biß sie die Axe in H erreichet, so heisset

ſet ſie die Normal-Linie ; der Theil der Axe aber PH, welcher zwiſchen ihr und der Semiordinate PM lieget, die Subnormal-Linie.

Die 3. Aufgabe.

32. In einer jeden gegebenen algebraiſchen Linie den zu einem gegebenen Puncte gehörigen Subtangentem zu finden. Tab. IX. Fig. 75.

Auflöſung.

Setzet die Semiordinate pm der anderen PM unendlich nahe, und ziehet MR mit der Axe AH parallel, ſo iſt MR = Pp (§. 22. *Geom.*) die Differential der Abſciſſe AP, mR die Differential der Semiordinate PM (§. 8). Weil nun PM mit pm parallel iſt, ſo iſt der Winckel MmR dem Winckel TMP gleich (§. 97. *Geom.*) folgends, da bey R und P rechte Winckel ſind, mR : MR = PM : PT, (§. 183. *Geom.*). Setzet nun PM = y, PA = x, ſo iſt MR = dx mR = dy (§. 13), folgends $dy : dx = y :$ PT, und demnach PT = $ydx : dy$. Wenn ihr nun den Werth von dx aus der Æquation ſubſtituiret, welche die Natur einer krummen Linie insbeſondere erkläret ; ſo verſchwindet dx und dy, und kommet der Subtangens TP in lauter endlichen Gröſſen heraus.

Der 1. Zuſatz.

33. Es ſey $ax = y^2$, ſo iſt $adx = 2ydy$, $dx = 2ydy : a$, folgends PT = $ydx : dy = 2y^2 dy : ady$

$ady = 2y^2 : a = 2ax : a = 2x$. Derowegen ist in der Parabel der Subtangens TP zu der Abscisse AP wie 2 zu 1.

Der 2. Zusatz.

34. Es sey für unendliche Parabeln a^{m-1} $x = y^m$, so ist

$$a^{m-1}dx = my^{m-1}dy \text{ (§. 18).}$$

$$dx = my^{m-1}dy : a^{m-1}$$

$$PT = ydx : dy = my^m dy : a^{m-1}dy = my^m : a^{m-1} = ma^{m-1}x : a^{m-1} = mx$$

Wenn also $m = 3$, so ist $PT = 3x$, das ist, in der Parabel von dem anderen Geschlechte ist PT : AP = 3 : 1 &c.

Der 3. Zusatz.

35. Es sey $a^n x^r = y^m$, so ist

$$ra^n x^{r-1} dx = my^{m-1}dy \text{ (§. 18.)}$$

$$dx = my^{m-1}dy : ra^n x^{r-1}$$

$$PT = ydx : dy = my^m dy : ra^n x^{r-1} dy = my^m : ra^n x^{r-1} = ma^n x^r : ra^n x^{r-1} = mx : r.$$

Setzet z. E. $a^3 x^2 = y^5$, so ist $PT = \frac{5}{2}x$, das ist, PT : AP = 5 : 2.

Der 4. Zusatz.

36. In dem Circul ist $ax - xx = yy$, und demnach

adx

$$adx - 2xdx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : (a - 2x)$$

PT $= ydx : dy = 2y^2dy : (a-2x)\,dy = 2y^2 : (a-2x) = (ax-xx) : (\frac{1}{2}a-x)$. Solchergestalt ist $\frac{1}{2}a-x : a-x = x : PT$.

Weil $PT = (ax-xx) : (\frac{1}{2}a-x)$; so ist $AT = (ax-xx) : (\frac{1}{2}a-x) - x = (ax-xx \cdot \frac{1}{2}ax + xx) : (\frac{1}{2}a-x) = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a-x)$, folgends $a-2x : a = x : AT$. Tab. IX. Fig. 75.

Der 5. Zusatz.

37. Es sey für unendliche Circul (§. 259. P. I.).

$$ax^m - x^{m+1} = y^{m+1}$$

so ist $max^{m-1}\,dx - (m+1)x^m dx = (m+1)y^m dy$

$$dx = (m+1)y^m dy : (max^{m-1} - (m+1)x^m)$$

$PT = ydx : dy = (m+1)y^{m+1} : (max^{m-1} - (m+1)x^m) = (m+1)(ax^m - x^{m+1}) : (max^{m-1} - (m+1)x^m) = (m+1)(ax-x^2) : (ma-mx-x)$. Demnach ist $AT = (m+1)(ax-x^2) : (ma-(m+1)x) - x = (max + ax - mx^2 - x^2 - max + mx^2 + x^2) : (ma-(m+1)x) = ax : (ma-(m+1)x)$.

Es sey ein Circul von dem anderen Geschlechte, so ist $m = 2$, also $AT = ax : (2a-3x)$ und $PT = (3ax-3x^2) : (2a-3x)$.

Der

Der 6. Zusatz.

38. In der Ellipsi ist $ay^2 = abx - bx^2$ (§. 239. P. I.) und daher

$$2aydy = abdx - 2bxdx$$

$$dx = 2aydy : (ab - 2bx)$$

$PT = ydx : dy = 2ay^2dy : (ab - 2bx)\ dy = 2ay^2 : (ab - 2bx) = (2abx - 2bx^2) : (ab - 2bx) = (2ax - 2x^2) : (a - 2x)$. Daher ist $AT = (2ax - 2x^2) : (a - 2x) - x = (2ax - 2x^2 - ax + 2x^2) : (a - 2x) = ax : (a - 2x)$ wie im Circul (§. 36).

Der 7. Zusatz.

39. Für unendliche Ellipses ist (§. 258. P. I.)

$$ay^{m+n} = bx^m (a - x)^n$$ und daher

$$(m+n)\, ay^{m+n-1} dy = mbx^{m-1} (a - x)^n dx - nbx^m (a - x)^{n-1} dx$$

$$(m+n)\, ay^{m+n-1} dy : (mbx^{m-1} (a - x)^n - nbx^m (a - x)^{n-1}) = dx$$

$PT = ydx : dy = (m+n)\, ay^{m+n} : (mbx^{m-1} (a - x)^n - nbxm (a - x)^{n-1}) = (mbx^m (a - x)^n + nbx^m (a - x)^n) : mbx^{m-1} (a - x)^n - nbx^m (a - x)^{n-1}) =$ (wenn ihr mit bx^{m-1} und $(a - x)^{n-1}$ dividiret) $(m+n)(ax - xx) : (ma - mx - nx)$.

Derowegen ist $= AT (m+n)(ax - xx) : (ma - mx - nx) - x = (max - mx^2 + nax - nx^2 - max + mx^2$

$mx^2 + nx^2) : (ma - mx - nx) = nax : (ma - mx - nx)$.

Es sey z. E. eine Ellipsis von dem anderen Geschlechte, so ist $m = 2$, $n = 1$ (§. 258. P. I.), PT $= (3ax - 3xx) : (2a - 3x)$, AT $= ax : (2a - 3x)$.

Der 8. Zusatz.

40. Für eine Hyperbel ist $ay^2 = abx + bxx$ (§. 260. *P. I.*) und daher findet ihr wie (§. 38). PT $= (2ax + 2xx) : (a + 2x$ und AT $= ax : (a + 2x)$.

Der 9. Zusatz.

41. Für unendliche Hyperbeln ist $ay^{m+n} = bx^m (a + x)^n$ (§. 286. *P. I.*). Derowegen findet ihr wie §. 39. PT $= (m + n)(ax + xx) : (ma + mx + nx)$ und AT $= nax : (ma + mx + nx)$.

Der 10. Zusatz.

42 Für eine Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist $xy = aa$ (§. 284. *P. I.*).

Daher $xdy + ydx = o$ (§. 14. 16).

$ydx = - xdy$

PT $= ydx : dy = - xdy : dy = - x$.

Also ist der Subtangens der Abscisse gleich, muß aber, weil — x ist, ihrem Ursprunge entgegen gesetzet werden, das ist, wenn

der

der Punct, wovon die Abscissen gerechnet werden, zur Lincken der Semiordinate ist, so wird der Subtrangens auf der Axe zu ihrer Rechten genommen.

Der 11. Zusatz.

43. Für unendliche Hyperbeln zwischen ihren Asymptoten ist $a^{m+n} = y^m x^n$ (§. 285. *P. I.*)

Daher $o = mx^n y^{m-1} dy + nx^{n-1} y^m dx$

$-mx^n y^{m-1} dy : nx^{n-1} y^m = dx$

$PT = ydx : dy = -mx^n y^m : nx^{n-1} y^m = -\frac{mx}{n}$

Es sey eine Hyperbel von dem anderen Geschlechte, so ist $m = 2$, $n = 1$, $PT = -2x$.

Der 12. Zusatz.

44. Endlich weil für alle Algebraische Linien (§. 214. *P. I.*)

$ay^m + bx^n + cy^r x^s + f = o$, so ist

$may^{m-1} dy + nbx^{n-1} dx + rcy^{r-1} x^s dy + scy^r x^{s-1} dx = o$

$nbx^{n-1} dx + scy^r x^{s-1} dx = -may^{m-1} dy - rcy^{r-1} x^s dy$

$dx = (-may^{m-1} dy - rcy^{r-1} x^s dy) : (nbx^{n-1} + scy^r x^{s-1})$

PT

$PT = ydx : dy = (- may^m - rcy^r x^s) : (nbx^{n-1} + scy^r x^{s-1})$, nach welcher Regel aller Algebraischen Linien Subtangentes gefunden werden, wenn ihr für die undeterminirte Buchstaben a, c, b und die Exponenten m, n, r, s ihren Werth aus ihrer Gleichung setzet. Z. E. Weil für die Parabel vom ersten Geschlechte

$ax = y^2$, oder $y^2 - ax = 0$, so ist

$ay^m = y^2 \quad bx^n = -ax \quad cy^r x^s = 0 \quad f = 0$

$a = 1, m = 2, b = -a, n = 1, c = 0 \quad r = 0 \quad f = 0$

daher $PT = (-2.1y^2 - 0.0y^0 x^0) : (-1.a x^{1-1} + 0.0y^0 x^{0-1}) = -2y^2 : -a = 2ax : a = 2x$.

Wiederum es sey $y^3 - x^3 - axy = 0$, so ist

$ay^m = y^3, bx^n = -x^3, cy^r x^s = -axy \quad f = 0$

$a = 1 \quad m = 3, b = -1 \quad n = 3, c = -a, r = 1 \quad f = 1$

daher $PT = (-3.1y^3 - 1. - ayx) : (3. - 1 x^{3-1} + 1. - ayx^{1-1}) = (-3y^3 + axy) : (-3x^2 - ay)$: folgends $AT = (3y^3 - ayx) : (3x^2 + ay) - x = (3y^3 - axy - 3x^3 - axy) : (3x^2 + ay) = (3axy - 2axy) : (3x^2 + ay) = axy : (3x^2 + ay)$. Denn da $y^3 - x^3 = axy$; so ist $3y^3 - 3x^3 = 3ayx$.

Der 3. Zusatz.

45. Weil $PT = ydx : dy$, $PM = y$; so ist $TM = \sqrt{(y^2dx^2 : dy^2 + y^2)} = \sqrt{((y^2dx^2 + y^2dy^2) : dy^2)} = y\sqrt{(dx^2 + dy^2) : dy}$.

Die 4. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 75. 46. Die Subnormal-Linie PH in einer Algebraischen Linie zu finden.

Auflösung.

Weil der Triangel TMH bey M rechtwinkelicht ist, so ist $TP : PM = PM : PH$ (§. 210. *Geom.*). $(ydx : dy) : y = y : PH$.

Derowegen $PH = y^2dy : ydx = ydy : dx$. Wenn ihr demnach aus der Gleichung für eine besondere Linie den Werth von dy durch x exprimiret; so bekommet ihr die Subnormal-Linie, wie vorhin die Subtangentem, in lauter endlichen Grössen.

Der 1. Zusatz.

47. Es sey $ax = y^2$,

so ist $adx = 2ydy$

$\frac{1}{2}adx = ydy$

$PH = ydy : dx = adx : 2dx = \frac{1}{2}a$

Demnach ist in der Parabel die Subnormal-Linie beständig dem halben Parame-

ter

ter gleich, folgends die Normal-Linie M H $= V(yy + \frac{1}{4}aa) = V(ax + \frac{1}{4}aa)$.

Der 2. Zusatz.

48. Es sey $ax - xx = y^2$

$$adx - 2xdx = 2ydy$$

$$\frac{1}{2}adx - xdx = ydy$$

$$PH = ydy : dx = \frac{1}{2}a - x$$

Daher ist klar, daß alle Normal-Linien in dem Circul durch den Mittelpunct gehen, oder, daß alle Radii des Circuls auf der Peripherie perpendicular stehen und demnach der Tangens des Circuls mit dem Radio einen rechten Winckel machet.

Der 3. Zusatz.

49. Weil $PH = ydy : dx$, und $PM = y$; so ist $HM = V(y^2 + y^2 dy^2 : dx^2) = V(y^2 dx^2 + y^2 dy^2 : dx^2) = yV(dx^2 + dy^2) : dx$.

Die 5. Aufgabe.

50. Die Asymptoten einer Algebraischen Linie zu determiniren.

Auflösung.

1. Wenn die Abscisse AP unendlich groß wird, so ist der Tangens TM die Asymptote, als welche die krumme Linie nicht Tab. IX. Fig. 75.

eher als in einer unendlichen Weite, das ist, niemahls berühren kan (§. 278. P. I.). Daher werden die unveränderlichen Grössen in Ansehung der Abscisse x unendlich kleine. Wenn ihr demnach in dem Werthe von AT diejenigen Grössen weglasset, die nicht mit x multipliciret sind; so findet ihr die Weite des Punctes C, daraus die Asymptote CD gezogen wird, von dem Scheitel-Puncte A.

Z. E. In der Hyperbel ist $AT = ax : (a + 2x)$ und demnach a in Ansehung x unendlich kleine, folgends $ax : 2x = \frac{1}{2}a = AC$, wie schon oben (§. 272. 278. P. I.) auf andere Art erwiesen worden.

2. Lasset nun ferner auch in der Gleichung für die krumme Linie die unveränderlichen Grössen, die durch keine andere multipliciret sind, weg; so könnet ihr dadurch den Werth von AE finden und folgends die Asymptote ziehen.

Z. E. In der Hyperbel ist $ay^2 = bx(a + x)$. Da nun a in Ansehung x unendlich kleine ist, so habet ihr

$$ay^2 = bx^2$$

folgends $y\sqrt{a} = x\sqrt{b}$

dy

$$dy\sqrt{a} = dx\sqrt{b}$$

$$dx : dy = \sqrt{a} : \sqrt{b}$$

Nun ist $dx : dy = AC : AE$ (§. 183. Geom.)
das ist $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \frac{1}{2}a : AE$.

Demnach ist $AE = \frac{1}{2}a\sqrt{b} : \sqrt{a} = \sqrt{\frac{1}{4}aab} : \sqrt{a} = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$, wie abermahl oben (§. 272. 278. P. I.) schon auf andere Art erwiesen worden.

Anders.

Weil $TP : PM = TA : AG$; so ist im Asymptotischen Falle, da TP zu CP, TA zu CA und AG zu AE wird, $CP : PM = CA : AE$. Nun ist $TP = 2x(a+x) : (a+2x)$ und also $CP = 2x^2 : 2x = x$, weil im asymptotischen Falle $a = o$. Daher ist $x : \frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}a : AE$, folgends $AE = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$.

Zusatz.

51. In unendlichen Hyperbeln ist (§. 41) überhaupt $AT = nax : (ma + mx + nx)$.
Daher $AC = nax : (mx + nx) = na : (m+n)$
Und weil ferner (§. 286. P. I.)

$$ay^{m+n} = bx^m (a+x)^n.$$

so ist $ay^{m+n} = bx^{m+n}$

oder, wenn ihr $m+n = r$ setzet

$$ay^r = bx^r$$

$$y a^{1:r} = x b^{1:r}$$

$$dy a^{1:r} = dx b^{1:r}$$

$$dx : dy = a^{1:r} : b^{1:r} = AC : AE$$

$$a^{1:r} : b^{1:r} = na : AE$$

$$AE = \frac{nab^{1:r} : ra^{1:r}}{r}$$

$$= \frac{na^{r-1:r} b^{1:r}}{r} = (n:r) \sqrt[r]{a^{r-1} b}.$$

Die 6. Aufgabe.

52. Den Subtangentem AH in einer Spiral-Linie zu finden.

Auflösung.

Tab. IX. Fig. 78. Es sey der halbe Diameter des Circuls $AB = a$, die Peripherie $= b$, der Bogen $BD = x$, $AG = y$, und AC dem radio AD unendlich nahe; so ist $CD = dx$, $EF = dy$. Weil nun EG ein Bogen ist, der mit AG beschrieben worden; so ist

AD

$$AD : AG = CD : EG$$
$$a : y = dx : ydx : a$$

Weil EG mit FA einen rechten Winckel machet (§. 48) und AH gleichfals auf EA perpendicular aufgerichtet worden; so ist §. 184. *Geom.*)

$$FE : EG = GA : AH$$
$$dy : ydx = y : \frac{y^2 dx}{a}$$
$$\frac{}{ady}$$

Nun ist für die Archimedische Spiral-Linie

$$ax = by \text{ (§. 312. P. I.)}$$

daher $adx = bdy$

$$dx = bdy : a$$

$$AH = y^2 dx : ady = by^2 : a^2 = axy : a^2 =$$
$$xy : a$$

Der 1. Zusatz.

53. Also könnet ihr den Subtangentem nicht finden, ihr müsset vorher den Circul-Bogen x in eine gerade Linie verwandeln können.

Der 2. Zusatz.

54. Für unendliche Spiral-Linien ist

$a^m x^n = b^n y^m$ (§. 312. P. 1).

$na^m x^{n-1} dx = mb^n y^{m-1} dy$

$dx = mb^n y^{m-1} dy : na^m x^{n-1}$

$AH = y^2 dx : ady = mb^n y^{m+1} : na^{m+1} x_{n-1} =$
$ma^m x^n y : na^{m+1} x^{n-1} = mxy : na.$

Der 3. Zusatz.

Tab. IX. Fig. 75. 55. Setzet, daß der Bogen BC sich zu FC verhalten solle wie die Abscisse in einer Algebraischen Linie zu ihrer Semiordinate. Solchergestalt ist $BC = x$, $CD = dx$, $FC = y$, $EF = dy$.

Nun ist

$AD : AG = CD : EG$

$r : r - y = dx : \frac{rdx - ydx}{r}$

$FE : EG = GA : AH$

$dy : \frac{rdx - ydx}{r} = r - y : \frac{(r-y)^2 dx}{rdy}$

Wenn ihr nun für dx in dem Werthe von AH seinen Werth aus der Gleichung einer Algebraischen Linie setzet; so habet ihr den Subtangentem AH.

Z. E. In der Parabel ist $ax = y^2$, und also $dx = 2ydy : a$. Derowegen wenn der Bogen BC die Abscisse einer Parabel, FC die Semiordinate und a ihren Parameter vorstellet; so

ist

So ist $AH = 2(r-y)^2 y dy : r a dy = (2r^2 y - 4ry^2 + 2y^3) : ra = (2r^2 y - 4arx + 2axy) : ra = \frac{xy}{r} - 4x + 2ry : a.$

Anmerckung.

56. Ihr könnet BC für die Abscisse und FC für die Semiordinate einer jeden Algebraischen Linie annehmen / und aus der allgemeinen Gleichung für alle krumme Linien einen allgemeinen Werth für AH finden.

Die 7. Aufgabe.

57. Den Subtangentem AT in der Conchoide des Nicomedis zu finden. Tab.IX. Fig.79.

Auflösung.

Es sey $AP = x$, $PM = y$, $Pp = MR = dx$ und $Rm = dy$. Daher ist $PT = y dx : dy$. Es sey ferner $AB = QM = a$, $CM = z$, $BC = b$; so ist $PB = a - x$, $PC = a + b - x$. Damit man den Werth von dx aus der Natur der krummen Linie finden möge; so setzet

$$\frac{a - x = v}{-dx = dv} \qquad \frac{a + b - x = t}{-dx = dt}$$

Ferner (§. 184. *Geom.*)

$$PB : MQ = PC : MC$$
$$v : a = t : z$$
$$\frac{}{}$$
$$az = vt$$
$$\frac{}{}$$
$$adt = zdv + vdz$$

Endlich (§. 172. *Geom.*) $CM^2 = PC^2 + PM^2$, das ist

$$z^2 = t^2 + y^2$$

$$2zdz = 2tdt + 2ydy$$

$$zdz = tdt + ydy$$

Setzet aus den vorhergehenden Gleichungen für dv und dt ihren Werth in den beyden letzteren; so habet ihr

$$-adx = -zdx + vdz \qquad zdz = -tdx + ydy$$

$$zdx - adx = vdx \qquad dz = \frac{-tdx + ydy}{z}$$

$$\frac{zdx - adx}{v} = dz$$

daher

$$\frac{zdx - adx}{v} = \frac{-tdx + ydy}{z}$$

$$z^2dx - azdx = -vtdx + vydy$$

$$z^2dx - azdx + vtdx = vydy$$

$$dx = \frac{vydy}{z^2 - az + vt}$$

Daher ist $PT = ydx : dy = vy^2 : (z^2 - az + vt)$ und die Subnormal-Linie $ydy : dx = (z^2$

$(z^2 - az + vt) : v = t + (z^2 - az) : v$. Da $x : z - a = v : \frac{(z^2 - az)}{v}$; so ist $(z^2 - az) : v$ die vierdte Proportional-Linie zu PB, QC und CM. Wenn man nun PC verlängert, biß der verlängerte Theil ihr gleich wird; so hat man die Subnormal-Linie und kan demnach die Normal-Linie und den Tangentem auf eine leichte Weise ziehen.

Die 8. Aufgabe.

58. Den Subtangentem PT in der Cycloide zu finden. Tab. IX. Fig. 80.

Auflösung.

Es sey APB der Circul, der die Cycloidem beschreibet, KP der Tangens des Circuls, qm der anderen Linie QM unendlich nahe und MR mit dem unendlich kleinen Bogen Pp parallel, den ihr für eine gerade Linie halten könnet. Da nun MS = PO, und der Winckel bey R so groß wie der bey p (§. 97. *Geom.*), folgends, weil bey S und O rechte Winckel sind, RMS = pPO (§. 105. *Geom.*); so ist auch MR = Pp (§. 71. *Geom.*). Es sey AP = x, PM = y, so ist Pp = MR = dx, mR = dy. Nun ist Rm mit PM parallel, und daher MmR = TMP (§. 97. *Geom.*). Und weil MR mit TP parallel ist, so ist mRM = MPT (§. *cit.*), folgends (§. 183. *Geom.*).

$$mR : MR = PM : PT$$
$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Nun ist in der Cycloide (§. 310. P. I.) $y = x$ und daher $dy = dx$, folgends $ydx : dy = y$.

Der 1. Zusatz.

59. Wenn ihr also den Tangentem des Circuls PK (§. 47) ziehet; so ist es auch leichte den Tangentem der Cycloidis TM zu ziehen.

Der 2. Zusatz.

Tab. IX. Fig. 80. 60. Lasset AP eine andere Algebraische krumme Linie seyn, derer Tangentem ihr ziehen könnet, ihre Bogen aber AP die Abscissen der Transcendentischen Linie AMC; so könnet ihr auf gleiche Weise ihre Tangentes ziehen. Es sey Z. E.

$$bx = ay$$

so ist $bdx = ady$

$$dx = ady : b$$

$$PT = ydx : dy = yady : bdy = ay : b$$

Die 9. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 81. 61. Den Subtangentem TP zu der Logarithmischen Linie zu finden.

Auf-

Auflösung.

Es sey AH die Axe, PM die Ordinate. Setzet AP = x, PM = y, so ist Pp = RM = dx, mR = dy, und weil die Aehnlichkeit der Triangel mRM und PMT wie oben (§. 32), erwiesen werden kan; so ist §. 143. *Geom.*).

$$mR : RM = PM : PT$$
$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Setzet eine andere Abscisse = v, die zugehörige Semiordinate = z: so ist der Subtangens = $zdv : dz$. Weil die Abscissen in einer arithmetischen Progreßion forgehen, so ist $dx = dv$ (§. 69. *Arithm.*). Hingegen weil die Semiordinaten in einer geometrischen fortschreiten (§. 306. P. I.), so ist

$$y : y + dy = z : z + dz$$

daher $y : dy = z : dz$ (§. 142. P. I.)
Nun ist $dx = dv$

Daher $ydx : dy = zdv : dz$ (§. *cit.*).

Also sind in der Logarithmischen Linie alle Subtangentes einander gleich, oder der Subtangens ist eine unveränderliche Linie.

Von

Von den grösten und kleinesten Applicaten der krummen Linien.

Die 9. Erklärung.

62. Wenn die Semiordinaten bis zu einem gewissen Ziele immer mit den Abscissen wachsen, hernach aber wieder abnehmen, unerachtet diese noch beständig zunehmen; so nennet man die Gröste diejenige, wo der Wachsthum aufgöret. Ingleichen wenn sie bis auf ein gewisses Ziel immer abnehmen, indem die Abscissen zunehmen, und hernach mit diesen fortwachsen, so heisset diejenige die Kleineste/ wo die Vergeringerung aufhöret. Die Methode einen Werth der Abscisse in lauter unveränderlichen Grössen zu finden, dem die gröste oder kleineste Applicate oder Semiordinate zukommet, nennet man die Methode von den Grösten und Kleinesten. (Methodum de maximis & minimis).

Anmerckung.

63. Man kan hierdurch auch viel andere Fragen auflösen/ da das gröste oder kleineste unter Dingen von einer Art gesuchet wird/ wie es die folgende Exempel zeigen werden.

Die 10. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 82.

64. Die gröste oder kleineste Applicate

cate in einer algebraischen Linie zu determiniren.

Auflösung.

Es ist klar, daß der Tangens in dem Puncte G, wo die gröste oder kleineste Applicate ist, mit der Axe parallel laufft, und daher der Subtangens unendlich groß ist. Wenn nun in allen algebraischen Linien der Subtangens $ydx:dy$ (§. 32) unendlich groß wird; so ist dy in Ansehung des Zehlers ydx unendlich kleine, weil er dy unendlich mahl in sich begreiffen muß, und darum $dy = o$ (§. 4). Suchet derowegen aus der gegebenen Gleichung für die krumme Linie die Differential-Grösse der Applicate und setzet sie $= o$; so könnet ihr aus dieser Gleichung den Werth von x durch gehörige Reduction finden.

In einigen Linien fället der Tangens in die Applicate CG und alsdenn ist der Subtangens $ydx:dy = o$. Wenn nun dieser Bruch unendlich kleine seyn soll, so muß dy unendlich groß seyn in Ansehung des Zehlers ydx. Dannenhero wenn $dy = o$ keinen möglichen Werth für die Abscisse zur grösten Applicate giebet; so setzet $dy = \infty$, das ist, einem unendlichen Werthe, und suchet aus dieser Gleichung die Abscisse x. Tab. IX. Fig. 83.

Der

Der 1. Zusatz.

65. Im Circul ist

$$ax - xx = y^2$$

$$adx - 2xdx = 2ydy$$

$$(adx - 2xdx) : 2y = dy = 0$$

$$a - 2x = 0$$

$$2$$

$$\frac{1}{2}a = x$$

Die Abscisse, welche in dem Circul der grösten Applicate zugehöret, ist dem halben Diameter gleich.

Der 2. Zusatz.

66. Für unendliche Circul ist

$$max^{m-1}dx - (m+1)x^m dx = (m+1)y^m dy = 0$$

$$max^{m-1} = (m+1)x^m$$

$$x^{m-1}$$

$$ma = (m+1)x$$

$$ma : (m+1) = x$$

Es sey $m = 3$, so ist es ein Circul von dem dritten Geschlechte und $x = \frac{3}{4}a$.

Der 3. Zusatz.

67. Für unendliche Ellipses ist

$$m($$

$(m+n)ay^{m+n-1}dy = mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m$
$(a-x)^{n-1}dx$

$dy = mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m(a-x)^{n-1}dx$
$: (m+n)ay^{m+n-1} = 0$

$nbx^m(a-x)^{n-1} = mbx^{m-1}(a-x)^n$
$x^{m-1}(a-x)^{n-1}$

$nbx = mba - mbx$

$nbx + mbx = mba$

$x = ma : (m+n)$

Es sey $m = 1, n = 1$, so ist es eine Ellipsis von dem ersten Geschlechte und $x = \frac{1}{2}a$, wie im Circul. Hingegen sey $m = 2, n = 1$, so ist es eine Ellipsis von dem anderen Geschlechte und $x = \frac{2}{3}a$.

Der 4. Zusatz.

68. Es sey $x^3 + y^3 = axy$

so ist $3x^2dx + 3y^2dy = axdy + aydx$

$3x^2dx - aydx = axdy - 3y^2dy$

$(3x^2dx - aydx) : (ax - 3y^2) = dy = 0$

$3x^2 = ay$

$3x^2 : a = y$

$$x^3+27x^6 : a^3 = 3ax^3 : a = 3x^3$$

$$27x^6 = 2a^3x^3$$

$$27x^3 = 2a^3$$

$$3x = a\sqrt[3]{2}$$

$$x = \tfrac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$$

Der 5. Zusatz.

69. Es sey $y - a = a^{1:3}(a-x)^{2:3}$

$$dy = -2dxa^{1:3} : 3(a-x)^{1:3} = 0$$

$$-2a^{1:3} = 0$$

Weil ihr keinen Werth von x findet, wenn ihr $dy = 0$ setzet, so nehmet

$$dy = -2dxa^{1:3} : 3(a-x)^{1:3} = \infty$$

Also ist $3(a-x)^{1:3}$ in Ansehung seines Zehlers $2dxa^{1:3}$ unendlich kleine. Darum habet ihr

$$3(a-x)^{1:3} = 0$$

$$a-x = 0$$

$$a = x$$

Die 11. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 75. 70. Aus dem gegebenen Puncte H in der Axe einer krummen Linie an die Periphe-

rie eine gerade Linie HM zu ziehen, welche die kleineste unter allen ist, die sich aus diesem Puncte ziehen lassen.

Auflösung.

Es sey $AP = x$, $PM = y$, $AH = c$, so ist $PH = c - x$, und, weil $PM^2 + PH^2 = MH^2$ (§. 172. *Geom.*; $c^2 - 2cx + xx + yy = MH^2$. Nehmet MH an als die Applicate einer krummen Linie und setzet

$$c^2 - 2cx + xx + yy = z^2$$

so ist $2xdx - 2cdx + 2ydy = 2zdz$

$$(2xdx - 2cdx + 2ydy) : 2z = dz = 0$$

$$xdx - cdx + ydy = 0$$

Wenn ihr nun aus der Gleichung für eine krumme Linie den Werth von ydy setzet; so könnet ihr daraus AP determiniren, der die Applicate PM zugehöret, dahin die kürzeste Linie HM gezogen wird.

Der 1. Zusatz.

71. Es sey für eine Parabel

$$ax = yy$$

so ist $adx = 2ydy$

$\frac{1}{2}adx = ydy$

$xdx - cdx + ydy = xdx - cdx + \frac{1}{2}adx = 0$

$x - c + \frac{1}{2}a = 0$

$x = c - \frac{1}{2}a.$

Der 2. Zusatz.

92. Es sey für eine Ellipsin

$ay^2 = abx - bx^2$

so ist $2aydy = abdx - 2bxdx$ 2a

$ydy = \frac{1}{2}bdx - bxdx : a$

$xdx - cdx + ydy = xdx - cdx + \frac{1}{2}bdx - bxdx : a = 0$

$x - c + \frac{1}{2}b - bx : a = 0$

$ax - ac + \frac{1}{2}ab - bx = 0$

$ax - bx = ac - \frac{1}{2}ab$ a-b

$x = (ac - \frac{1}{2}ab) : (a - b)$

Der 3. Zusatz.

93. Auf gleiche Weise findet ihr für die Hyperbel, daß $x = (ac + \frac{1}{2}ab) : (a + b)$.

Die

Die 12. Aufgabe.

74. Eine Linie AB dergestalt in D zu schneiden, daß das Product aus dem Quadrate des einen Theiles AD in den anderen DB das gröste sey unter allen, die auf dergleichen Art formiret werden können. Tab. VIII. Fig. 67.

Auflösung.

Es sey $AB = a$, $AD = x$, so ist $AD^2 . DB = axx - x^3$! Setzet demnach, es sey eine krumme Linie, in welcher

$$axx - x^3 = aay$$

so ist $2axdx - 3x^2dx = aady$

$$(2axdx - 3x^2dx) : aa = dy = 0$$

$$2ax = 3x^2$$

$$\frac{2}{3}a = x$$

Die 13. Aufgabe.

75. Eine Linie AB dergestalt in D zu schneiden, daß das Product aus einer gegebenen Dignität des einen Theiles AD in eine gegebene Dignität des anderen Theiles DB das gröste unter allen sey, die auf dergleichen Art formiret werden. Tab. VIII. Fig. 67.

Auflösung.

Es sey $AB = a$, $AD = x$; so ist $x^m (a - x)^n$ das gröste von seiner Art. Setzet demnach

$$x^m(a-x)^n = a^{m+n-1}y$$

$$\text{so ist } mx^{m-1}(a-x)^n\,dx - nx^m(a-x)^{n-1}\,dx = a^{m+n-1}\,dy$$

$$(mx^{m-1}(a-x)^n\,dx - nx^m(a-x)^{n-1}\,dx) : a^{m+n-1} (= dy = o$$

$$mx^{m-1}(a-x)^n = nx^m(a-x)^{n-1}$$

$$m(a-x)^n = nx(a-x)^{n-1}$$

$$ma - mx = nx$$

$$ma : (m+n) = x$$

Die 14. Aufgabe.

76. Unter allen Parallelepipedis, die einem gegebenen Würffel gleich sind, und deren eine Seite gegeben wird, dasjenige zu finden, das die geringste Fläche hat.

Auflösung.

Es sey b die eine Seite, x die andere, der gegebene Würffel $= a^3$, so ist die dritte $= a^3 : bx$.

Folgends die Fläche des Parallelepipedi $2bx + 2a^3 : x + 2a^3 : b$. Setzet demnach es sey in einer krummen Linie.

$$2bx + 2a^3 : x + 2a^3 : b = ay$$

so ist $2bdx - 2a^3dx : x^2 = ady = o$

$2b - 2a^3 : x^2 = o$

$bx^2 = a^3$

$x^2 = a^3 : b$

$x = V(a^3 : b)$

Also sind die drey Seiten b, $V(a^3 : b)$ und $a^3 : bV(a^3 : b) = V(a^6 : V(b^2a^3 : b)) = V(a^6 : Va^3b) = V(a^3 : b)$.

Die 15. Aufgabe.

77. **Unter allen Parallelepipedis, die einem gegebenen Würffel gleich sind, dasjenige zu finden, so die kleineste Fläche hat.**

Auflösung.

Es sey der gegebene Würffel $= a^3$, die eine Seite $= x$, so sind die beyden anderen Seiten (§. 76) $V(a^3 : x)$, und daher ist die Fläche des Parallelepipedi $= 2a^3 : x + 4V a^3x$. Da nun dieses die kleineste von ihrer Art ist, so setzet die Gleichung für eine krumme Linie

$2a^3 : x + 4V a^3x = ay$

so ist $-2a^3dx : x^2 + 2a^3dx : V a^3x = ady$

$-2a^2dx : x^2 + 2a^2dx : V a^3x = o$

$$a^2 : \sqrt{a^3x} = a^2 : x^2$$

$$x^2 = \sqrt{a^3x}$$

$$x^4 = a^3x$$

$$x^3 = a^3$$

$$x = a$$

Also hat der Würffel selbst die kleineste Fläche.

Die 16. Aufgabe.

78. Unter allen Kegeln, die innerhalb einer Kugel beschrieben werden können, denjenigen zu determiniren, der die gröste Fläche hat.

Auflösung.

Tab. X. Fig. 84. Es ist klar, daß, wenn sich ein halber Circul um seinen Diameter AB wendet, derselbe eine Kugel, die Triangel aber ANP, AFE &c. Kegel beschreiben. Die Fläche des Kegels kommet heraus, wenn ihr die Seite des Kegels FA durch die halbe Peripherie, die mit dem Radio FE beschrieben worden, multipliciret. Weil ihr nun die gröste von ihrer Art suchet, so setzet AE = x, AB = a, und es ist FE = $\sqrt{(ax - xx)}$ (§. 210. *Geom.*), die halbe Peripherie $m\sqrt{(ax - xx)}$, AF = $\sqrt{ax}$. Derowegen habet ihr die Gleichung für eine krumme Linie.

$m\sqrt{}$

$$m\sqrt{(ax-xx)}\sqrt{ax} = ay$$

$$m\sqrt{(a^2x^2-ax^3)} = ay$$

$$2ma^2x\,dx - 3max^2dx : 2\sqrt{(a^2x^2-ax^3)} = a\,dy$$

$$2ax - 3x^2 = 0$$

$$2a = 3x$$

$$\tfrac{2}{3}a = x$$

ENDE

des anderen Theiles.

Der dritte Theil.
Von den
Anfangs-Gründen
Der
Integral-Rechnung.

Die 1. Erklärung.

79.

Die Integral-Rechnung ist eine Wissenschaft aus einer gegebenen unendlich kleinen Grösse diejenige endliche zu finden, durch deren Differentiirung sie entstehet.

Zusatz.

80. Derowegen habet ihr eine gewisse Probe ob ihr die rechte Grösse gefunden, wenn ihr die gefundene Integral nach den oben gegebenen Regeln differentiiret und die gegebene Differential wieder heraus kommet.

Die 2. Erklärung.

81. Integriren oder Summiren heisset die Grösse finden, aus welcher durch Differentiirung die gegebene unendlich kleine entstanden.

Die 1. Aufgabe.

82. Eine gegebene Differential zu integriren oder summiren.

Auf-

Auflösung.

Gleichwie man die Differentiale der veränderlichen Grössen durch d andeutet; so pfleget man die Integrale derselben als die Summe unendlicher unendlich kleiner Grössen durch $\int$ anzudeuten. Daher heisset $\int y dx$ so viel als die Integral von $y dx$.

Wenn ihr nun die Integral finden wollet, so vergleichet die gegebene Differential mit denen, so ihr oben (§. 13 *& seqq.*) gefunden: so werdet ihr bald wahrnehmen, wie die Veränderung vorzunehmen sey. Es ist aber

I. $\int dx = x + a$

II. $\int (dx \pm dy) = x \pm y + a$ oder $x \pm y$

III. $\int (x dy + y dx) = xy$

IV. $\int m x^{m-1} dx = x^m$

V. $\int (n:m) x^{n-m:m} dx = x^{n:m}$

VI. $\int (y dx - x dy) : y^2 = x : y$

Von diesen Formuln seyd ihr gewiß, daß sie sich alle integriren lassen, und zwar setzet ihr in dem anderen und ersten Falle nur an stat dx oder dy die veränderliche Grösse x oder y selbst. In dem dritten multipliciret ihr die beyden veränderlichen Grössen xy durch einander, dadurch ihre Differentiale dy und dx multipliciret sind. In dem vierdten und fünfften (welcher der gewöhnlichste ist) addi-

ret ihr zu dem Exponenten der Dignität der veränderlichen Grösse 1 und durch den vermehrten und die Differential der veränderlichen Grösse dividiret ihr die gegebene Differential. Endlich in dem sechsten Falle nehmet ihr die veränderliche Grösse mit dem Zeichen — für den Zehler und die Wurtzel von dem Quadrate des Nenners für den Nenner an.

Die 1. Anmerckung.

83. Es können zwar noch viel andere Fälle vorkommen / die hier nicht berühret werden: allein ihr werdet es besser aus Exempeln / als durch weitläuftige Regeln lernen.

Die 2. Anmerckung.

84. Mercket aber / daß einige Grössen sind / die sich nicht integriren lassen. Denn wie man in der gemeinen Algebra zwar alle Grössen zu einer verlangten Dignität erheben / nicht aber aus jeder Dignität eine verlangte Wurtzel ausziehen kan; eben so kan man in der höheren Analysi zwar eine jede veränderliche Grösse differentiiren / allein nicht eine jede Differential summiren. Gleichwie man aber in der gemeinen Algebra die Wurtzel durch Näherung suchet / eben so pfleget man in der höheren die Integral durch Näherung zu suchen / wo man sie nicht vollkommen haben kan. Allein zur Zeit hat man noch keine Regel / daraus man schliessen könte / ob die Summation stat findet oder nicht / und können wohl einige Differentiale zum Summiren geschickt seyn / die wir zur Zeit noch nicht summiren können.

Von den Quadraturen der krummen Linien.

Die 3 Erklärung.

85. Die Differential oder das Element einer

einer ebenen Fläche, die in eine krumme und zwey gerade Linien eingeschlossen, als AMP, ist das Rectangulum aus der Semiordinate PM in die Differential der Abscisse Pp. Tab. IX. Fig. 75.

Der 1. Zusatz.

86. Derowegen wenn die Semiordinate PM $= y$, AP $= x$, so ist Pp $= dx$ und das Rectangulum PMRp $= ydx$.

Der 2. Zusatz.

87. Weil die Semiordinaten PM und p m einander unendlich nahe sind, so ist ihre Differentz mR in Ansehung ihrer nichts (§. 4), und daher das Rectangulum PMRp dem Trapezio PMmp gleich (§. 5). Da ihr nun die Figur in unendliche solche Trapezia resolviren könnet; so ist $\int ydx$ der Inhalt der Fläche AMP.

Der 3. Zusatz.

88. Derowegen wenn ihr aus der Gleichung für eine krumme Linie den Werth von y setzet, und ihr könnet die Differential der Fläche integriren, so habet ihr die Quadratur der Fläche gefunden.

Die 2. Aufgabe.

89. Den Inhalt eines Triangels zu finden.

Auf-

Auflösung.

Tab. IX. Fig. 75. Wenn ihr die krumme Linie AM als eine gerade ansehet, so ist AMP ein Triangel, und daher auch sein Element ydx. Setzet nun die Höhe des Triangels, davon x ein Theil ist, $= a$, die Grund-Linie, welche mit PM oder y parallel ist, $= b$; so ist (§. 184. *Geom.*) $a : b = x : y$ folgends

$$ay = bx$$

$$y = bx : a$$

$$ydx = bxdx : a$$

$$\int ydx = bx^2 : 2a \text{ (§. 82)}$$

Wenn ihr nun den gantzen Triangel verlanget, so setzet für den Theil der Höhe x, die gantze Höhe a und ihr findet den Inhalt $ba^2 : 2a = \frac{1}{2} ab$.

Anmerckung.

90. Dieses Exempel habe ich nur zu dem Ende gegeben / damit ihr sehet / daß durch die Integral-Rechnung / deren Gründe den Anfängern zuerst zweiffelhaft scheinen / weil man den Triangel MmR für nichts ansiehet / eben das gefunden wird / was in der gemeinen Geometrie aus anderen Gründen erwiesen worden.

Die 3. Aufgabe.

91. Die Parabel zu qvadriren.

Auflösung.

In der Parabel ist $ax = y^2$

$$a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = y$$

$$y dx = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\int y dx = \tfrac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3} \sqrt{a x^3} = \tfrac{2}{3} \sqrt{x^2 y^2}$$
$$= \tfrac{2}{3} xy.$$

Zusatz.

92. Also verhält sich der Raum in der Parabel AMP zu dem Rectangulo aus der Semiordinate PM in die Abscisse AP wie $\frac{2}{3}$ xy zu xy, das ist, wie 2 zu 3.

Die 4. Aufgabe.

93. Unendliche Parabeln auf einmahl zu qvadriren.

Auflösung.

Für unendliche Parabeln und noch andere Linien ist

$$a^m x^n = y^r$$

$$a^{m:r} x^{n:r} = y$$

$$y dx = a^{m:r} x^{n:r} dx$$

$$\int y dx = \frac{r}{n+r} a^{m:r} x^{n+r:r} = \frac{r}{n+r} yx$$

Z. E. Es sey eine Parabel von dem an-

de-

deren Geschlechte, so ist $a^2x = y^3$, daher $r = 3$, $n = 1$, folgends $\int y dx = \frac{3}{4}xy$.

Die 5 Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 75. **94. Das Stücke von der Parabel PMNS zu qvadriren.**

Auflösung.

Es sey die unveränderliche Linie $AP = b$, $PS = x$, $SN = y$, der Parameter $= a$; so ist $AS = b + x$ und (§. 217. P. I.).

$$ab + ax = y^2$$

$$V(ab + ax) = y$$

$$dx\,V(ab + ax) = y\,dx$$

Damit man dieses Element integriren kan; so setzet

$$V(ab + ax) = v$$

so ist $ab + ax = v^2$

$$a\,dx = 2v\,dv$$

$$dx = 2v\,dv : a$$

$$dx\,V(ab + ax) = 2v^2\,dv : a$$

$$\int y\,dx = \tfrac{2}{3}v^3 : a = \tfrac{2}{3}(b + x)\,V(ab + ax).$$

Weil

Weil x in P $= o$ wird und auch der Raum PSNM nichts werden muß, wenn $x = o$; hingegen wenn ihr in der gefundenen Summe $x = o$ setzet, $\frac{2}{3} b \sqrt{ab}$ übrig bleibet; so ist klar, daß ihr von dem gefundenen Werthe $\frac{2}{3} b \sqrt{ab}$ noch abziehen müsset, damit ihr den Inhalt von dem Raume PMNS $= \frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)} - \frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ bekommet. Nemlich $\frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)}$ ist der gantze Parabolische Raum ANS, und $\frac{2}{3} b \sqrt{ab}$ das Stücke AMP; folgends der Unterscheid PMNS.

Es könte auch AS von beständiger Grösse angenommen und x von S angerechnet werden. Wenn nun AS $= b$, SP $= x$, so ist PA $= b - x$, folgends (weil PM $= y$)

$$ab - ax = y^2$$

$$\sqrt{(ab - ax)} = y$$

$$dx\sqrt{(ab - ax)} = y\,dx$$

Setzet wie vorhin

$$ab - ax = v^2$$

so ist $$-a\,dx = 2v\,dv$$

$$dx = -2v\,dv : a$$

$$dx\sqrt{(ab - ax)} = -2v^2\,dv : a$$

$$\int y\,dx = -\tfrac{2}{3}v^3 : a = -\tfrac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$$

Setzet ferner, wie vorhin, $x = o$; so bleibet $-\frac{2}{3} b \sqrt{ab}$ übrig, und demnach müsset ihr $\frac{2}{3} b \sqrt{ab}$ addiren, damit der Inhalt des Raumes PMNS herauskommet. Nemlich ANS $= \frac{2}{3} b \sqrt{ab}$ und APM $= \frac{2}{3} (b - x) \sqrt{(ab - ax)}$; folgends PMNS $= \frac{2}{3} b \sqrt{ab} - \frac{2}{3} (b - x) \sqrt{(ab - ax)}$.

Zusatz.

95. Wenn also die Gleichung für eine krumme Linie gegeben wird, und man nicht weiß, wo x in der Axe seinen Anfang hat; so erhellet aus der Auflösung, daß man nur $x = o$ setzen darf, um zu finden, ob noch etwas zu addiren oder zu subtrahiren übrig verbleibet.

Die 6. Aufgabe.

96. Eine Linie zu qvadriren, in welcher $xy^3 = a^4$.

Auflösung.

Weil $xy^3 = a^4$

so ist $y^3 = a^4 : x = a^4 x^{-1}$

$y = a^{4:3} x^{-1:3}$

$y dx = a^{4:3} x^{-1:3} dx$

$\int y dx = \frac{3}{2} a^{4:3} x^{2:3} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{a^4 x^2}$.

Die 7. Aufgabe.

97. Die krumme Linie des *Carteſii* (Tom. 3. Epiſt.

3. Epist. p. 219.) zu qvadriren, in welcher $b^2 : x^2 = b - x : y$.

Auflösung.

Weil $b^2 y = bx^2 - x^3$

so ist $y = (bx^2 - x^3) : b^2$

$ydx = (bx^2 dx - x^3 dx) : b^2$

$\int y dx = x^3 : 3b - x^4 : 4b^2$

Die 8. Aufgabe.

98. Die krumme Linie zu qvadriren, deren Gleichung ist $x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^5 = a^4y$.

Auflösung.

Weil $y = x^5 : a^4 + x^4 : a^3 + x^3 : a^2 + x^2 : a + a$

so ist $ydx = (x^5 : a^4 + x^4 : a^3 + x^3 : a^2 + x^2 : a + a)dx$

$\int ydx = x^6 : 6a^4 + x^5 : 5a^3 + x^4 : 4a^2 + x^3 : 3a + ax$.

Die 9. Aufgabe.

99. Eine krumme Linie zu qvadriren, in welcher $y^2 = x^4 + a^2x^2$.

Auflösung.

Weil $y^2 = x^4 + a^2x^2$

so ist $y = \sqrt{(x^4 + a^2x^2)} = x\sqrt{(x^2 + a^2)}$

$ydx = xdx\sqrt{(x^2 + a^2)}$

Damit dieses Element zum integriren geschickt werde, setzet

$$x^2 + a^2 = v^2$$

so ist $2xdx = 2vdv$

$$xdx\sqrt{(a^2+x^2)} = v^2dv$$

$\int xdx\sqrt{(x^2+a^2)} = \frac{1}{3}v^3 = \frac{1}{3}(x^2+a^2)\sqrt{(x^2+a^2)}$.

Setzet nun $x = o$, so bleibet $\frac{1}{3}a^3$ übrig. Solchergestalt ist $\int ydx = \frac{1}{3}(x^2+a^2)\sqrt{(x^2+a^2)} - \frac{1}{3}a^3$ (§. 94).

Die 10. Aufgabe.

100. Eine krumme Linie zu qvadriren, in welcher $y^2 = x^3 + ax^2$.

Auflösung.

Weil $y^2 = x^3 + axx$

so ist $y = x\sqrt{(x+a)}$

$$ydx = xdx\sqrt{(x+a)}$$

Damit dieses Element zum integriren geschickt werde, setzet

$$x + a = v^2$$

so ist $x = v^2 - a$

dx

$$dx = 2vdv$$

$$xdx\sqrt{(x+a)} = 2v^4dv - 2av^2dv$$

$$\int xdx\sqrt{(x+a)} = \tfrac{2}{5}v^5 - \tfrac{2}{3}av^3 = (\tfrac{2}{5}(xx+2ax+aa) - \tfrac{2}{3}(ax+aa))\sqrt{(x+a)} = (\tfrac{6}{15}(xx+2ax+aa) - \tfrac{10}{15}(ax+aa))\sqrt{(x+a)} = (6x^2+2ax-4aa)\sqrt{(x+a)} : 15 + \tfrac{4}{15}a^2\sqrt{a}$$

(§. 94).

Die 11. Aufgabe.

101. **Eine krumme Linie zu qvadriren, in welcher** $y^2 = x^2 : (x+a)$.

Auflösung.

Weil $y^2 = x^2 : (x+a)$

so ist $y = x : \sqrt{(x+a)}$

$$ydx = xdx : \sqrt{(x+a)}$$

Setzet $\sqrt{(x+a)} = v$

so ist $x+a = v^2$

$$x = v^2 - a$$

$$dx = 2vdv$$

$$xdx : \sqrt{(x+a)} = (2v^3dv - 2avdv) : v = 2v^2dv - 2adv$$

$$\int xdx : \sqrt{(x+a)} = \tfrac{2}{3}v^3 - 2av = (\tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{3}a - 2a)\sqrt{(x+a)} = (\tfrac{2}{3}x - \tfrac{4}{3}a)\sqrt{(x+a)} = \sqrt{(4x^3 -$$

$12ax + 16a^3 : 9) = \frac{2}{3} V (x^3 - 3axx + 4a) - \frac{4}{3} a V a$ (§. 94).

Die 12. Aufgabe.

102. Die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten zu qvadriren.

Auflösung.

Für die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist

$$a^2 = by + xy \quad \text{(§. 287. P. I.)}$$

daher $a^2 : (b + x) = y$

$$y\,dx = a^2\,dx : (b + x)$$

Damit dieses Element zum integriren geschickt werde, so dividiret in der That

$$b+x) \; a^2 \; \left(\frac{a^2}{b} - \frac{a^2 x}{b^2} + \frac{a^2 x^2}{b^3} - \frac{a^2 x^3}{b^4} \text{ &c.} \right.$$

$$a^2 + a^2 x : b$$

$$- a^2 x : b$$

$$b+x) \quad - a^2 x : b - a^2 x^2 : b^2$$

$$+ a^2 x^2 : b^2$$

$$b+x) \quad + a^2 x^2 : b^2 + a^2 x^3 : b^3$$

$$- a^2 x^3 : b^3$$

$$b+x)$$

Denn ist $a^2\,dx : (b+x) = \frac{a^2\,dx}{b} - \frac{a^2 x\,dx}{b^2} +$

a^2

$\frac{a^2x^2\,dx}{b^3} - \frac{a^2x^3\,dx}{b^4}$ u. s. w. unendlich fort.

Folgends habet ihr $\int y\,dx = \frac{a^2x}{b} - \frac{a^2x^2}{2b^2} +$

$\frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^2x^4}{4b^4}$ u. s. w. unendlich fort, das ist,

wenn ihr $a = b = 1$ setzet, $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 -$
$\frac{1}{4}x^4$ &c.

Anmerckung.

103. Diese Qvadratur der Hyperbel hat zuerst Nic. Mercator in seiner Logarithmotechnia gegeben, welcher die unendlichen Reihen zu Qvadrirung der Figuren zuerst gebrauchet, die man nicht genau qvadriren kan.

Die 13. Aufgabe.

104. Den Circul zu qvadriren.

Auflösung.

Die Gleichung für den Circul ist

$$y^2 = a^2 - x^2 \quad \text{(S. 198. P. I.)}$$

$$y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

$$y\,dx = dx\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

Ziehet aus $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ die Wurtzel, so findet ihr (S. 97. P. I.) $y\,dx = a\,dx - \frac{x^2\,dx}{2a} -$

$\frac{x^4\,dx}{8a^3} - \frac{x^6\,dx}{16a^5} - \frac{5x^8\,dx}{128a^7}$ u. s. w. unendlich fort,

dessen Integrale $ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ u. s. w. unendlich fort den Theil des

Tab. X. Fig. 48.

Circuls BNP ausdrucket.

Wenn ihr für x den halben Diameter a setzet, so kommet der Werth des Quadrantens $a^2 - \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{40} - \frac{a^2}{112} - \frac{5a^2}{1152}$ u. s. w. Setzet $a = \frac{1}{2}$, so ist $a^2 = \frac{1}{4}$, und demnach der gantze Circul $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152}$ u. s. w. unendlich fort.

Anders.

Tab. II. Fig. 15.

Es sey CB der Tangens des halben Bogens GB $= x$, der halbe Diameter BA $= a$, so ist BD der Tangens des gantzen Bogens BG $= 2aax : (aa - xx)$ (§ 190. P. I.), folgends DA $= (a^3 + ax^2) : (aa - xx)$ (§. cit.). Nun ist (§. 184. *Geom.*) DA : DB = GA : GH und AD : AB = AG : AH : darum findet ihr GH $= 2a^2x : (a^2 + x^2)$ und AH $= (a^3 - ax^2) : (aa + xx)$ endlich BH $=$ AB $-$ AH $= 2ax^2 : (aa + xx)$. Wenn ihr der beyden Differential-Grössen von GH und BH, nemlich $(2a^2 dx - 2a^2x^2 dx) : (a^2 + x^2)^2$ und $4a^3x dx : (a^2 + x^2)^2$, Quadrate $(4a^8 dx^2 -$

$8a^6$

$8a^6x^2dx^2 + 4a^4x^4dx^2 : (a^2+x^2)^4$ und $16a^6x^2dx^2 : (a^2+x^2)^4$ zusammen setzet, und aus der Summe $(4a^8dx^2+8a^6x^2dx^2+4a^4x^4dx^2) : (a^2+x^2)^4$ die Quadrat-Wurtzel $(2a^4dx+2a^2x^2dx) : (a^2+x^2)^2 = 2a^2dx : (a^2+x^2)$ ausziehet; so habet ihr die Differential des Bogens GB. Multipliciret diese in den halben Radium oder $\frac{1}{2}a$; so kommet das Element des Sectoris BGA (§. 171. *Geom.*) heraus $a^3dx : (a^2+x^2)$. Setzet $a = 1$; so ist das Element $dx : (1+x^2)$. Nun findet ihr durch die gemeine Division wie in der vorhergehenden Aufgabe (§ 102) $1 : (1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10}$ u. s. w. unendlich fort, und folgends $\int dx : (1+x^2) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11}$ u. s. w. unendlich fort. Diese unendliche Reihe ist für den Ausschnitt BAG, dessen halben Bogens Tangens $BC = x$ ist. Nun ist der Tangens des halben Quadrantens dem Radio gleich. Derowegen wenn ihr $x = 1$ setzet / so ist $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ u. s. w. unendlich fort der Inhalt des Quadrantens. Nehmet ihr endlich den Diameter des Circuls 1 an; so ist eben selbige unendliche Reihe der Inhalt des gantzen Circuls.

Anmerckung.

105. Die erste Reihe für den Circul hat der Herr *Newton*; die andere der Herr von Leibnitz gefunden / und ist auch schon vorher *Jacob Gregorius* darauf kommen / ob er sie gleich nicht in Schrifften publiciret.

Die 14. Aufgabe.

Tab. III. Fig. 27.

106. Die Ellipsin zu qvadriren.

Auflösung.

Es sey $AC = a$, $DC = b$, $PC = x$, $PM = y$; so ist $AP = a - x$, $PB = a + x$, und aus der Natur der Ellipsis

$$AP.PB : AC^2 = PM^2 : CD^2 \text{ (§. 251. P. I.)}$$
$$aa - xx : aa = yy : bb$$

$$aayy = bb(aa - xx)$$
$$y = bV(aa - xx) : a$$
$$ydx = bdxV(aa - xx) : a$$

Nun ist $V(aa - xx) = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$

u. s. w. unendlich fort (§. 97. P. I.)

Derowegen ist $bdxV(aa - xx) : a = bdx - \frac{bx^2dx}{2a^2} - \frac{bx^4dx}{8a^4} - \frac{bx^6dx}{16a^6} - \frac{5bx^8dx}{128a^8}$ u. s. w. unendlich fort. Folgends ist $\int ydx = bx - \frac{bx^3}{6a^2} - \frac{bx^5}{40a^4} - \frac{bx^7}{112a^6} - \frac{5bx^9}{1152a^8}$ u. s. w. unendlich fort.

Wenn ihr für x die halbe Axe a setzet, so bekommet ihr für den Qvadranten der El-

Ellipsis $ab - \frac{1}{6}ab - \frac{1}{40}ab - \frac{1}{112}ab - \frac{5}{1152}ab$ u. s. w. unendlich fort, und also für die gantze Ellipsin eben dieselbe Reihe, wenn ihr a für die gantze grosse und b für die gantze kleine Axe annehmet.

Der 1. Zusatz.

107. Wenn ihr $\sqrt{ab} = 1$ setzet, so kommet die Reihe für den Circul $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152}$ u. s. w. heraus (§. 104). Derowegen ist die Ellipsis einem Circul gleich, dessen Diameter die mittlere Proportional-Linie ist zwischen seiner kleinen und grossen Axe, und also verhält sich die Ellipsis zu dem Circul, der mit der grossen Axe beschrieben wird, wie die kleine Axe zu der grossen.

Der 2. Zusatz.

108. Daher dependiret die Qvadratur der Ellipsis von der Qvadratur des Circuls.

Die 1. Anmerckung.

109. Die Qvadratur des Circuls/ der Ellipsis und Hyperbel hat noch niemand durch einen endlichen Werth gegeben.

Die 2. Anmerckung.

110. Aus der gefundenen Qvadratur der Ellipsis lässet sich nun ferner der Lehrsatz erweisen/ den wir in der Astronomie (§. 419) angenommen/ daß nemlich der Sector des Circuls KAP sich zu dem Sectore CAP verhalte wie der Circul zu der Ellipsi. Denn es ist klar/ daß CLP sich zu KLP verhalte/ wie $\frac{b}{a}\int dx\sqrt{(a^2-x^2)}$ zu $\int dx\sqrt{(a^2-x^2)}$. Tab. X. Fig. 85.

x^2) (§. 104. 106), folgends wie b zu a (§. 144. P. I.), oder RE zu DR. Die Triangel aber CAL und KAL verhalten sich wie CL zu KL (§. 176. *Geom.*) oder wie RE zu DR, folgends so wohl sie als die Abschnitte PLC und PLK wie die Ellipsis zu dem Circul (§. 107). Folgends ist KAL + KLP zu CAL + CLP wie der Circul zu der Ellipsi (§. 144. P. I.).

Die 3. Anmerckung.

111. Daß aber $LC : LK = RE : DR$ lässet sich leicht erweisen. Denn vermöge der gegenwärtigen Aufgabe ist $LC = b\sqrt{(aa - xx)} : a$ und $LK = \sqrt{(aa - xx)}$. Daher $LC : LK = b\sqrt{(aa - xx)} : a\sqrt{(aa - xx)} = b : a = RE : DR$.

Die 15. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 81. 112. Den Raum HPMI und ihrer Axe zu finden.

Auflösung.

Es sey $PM = y$, $Pp = dx$, der Subtangens $= a$ (§. 61), so ist $ydx : dy = a$

$$ydx = ady$$

$$\int ydx = ay$$

Der 1. Zusatz.

113. Setzet $QS = z$, so ist $HQIS = az$, folgends $PQSM = ay - az = a(y - z)$ das ist, dem Rectangulo aus dem Subtangente in die Differentz der Semiordinaten PM und QS.

Der

Der 2. Zusatz.

114. Derowegen verhalten sich die Räume zwischen zweyen Semiordinaten wie ihre Differentzen.

Die 16. Aufgabe.

115. Die Spiral-Linie zu qvadriren. Tab. IX. Fig. 78.

Auflösung.

Es sey alles, wie in der 6 Aufgabe (§. 52), so ist EG $= ydx : a$, folgends der kleine Sector EAG oder das Element der Fläche $y^2dx : 2a$. Nun ist die Spiral-Linie (§. 312. P. I.)

$$ax = by$$

$$a^2x^2 : b^2 = y^2$$

$$y^2dx : 2a = ax^2dx : 2bb$$

$$\int y^2dx : 2a = ax^3 : 6bb$$

Wenn ihr für x die gantze Peripherie b setzet, so kommet für den Raum, den die gantze Spiral-Linie einschliesset, $\frac{1}{6}ab$.

Der 1. Zusatz.

116. Da nun der umschriebene Circul $\frac{1}{2}ab$ ist, so verhält sich die Spiral-Fläche zu ihm wie $\frac{1}{6}ab$ zu $\frac{1}{2}ab$, das ist, wie 1 zu 3 (§ 144. P. I.).

Der

Der 2. Zusatz.

117. Für unendliche Spiral-Linien ist

$$a^m x^n = b^n y^m \quad (\S. 312. P. I.)$$

$$ax^{n:m} : b^{n:m} = y$$

$$a^2 x^{2n:m} : b^{2n:m} = y^2$$

$$\int y^2 dx : 2a = max^{2n+m,:m} : (4n+2m) b^{2n:m}$$

Wenn ihr nun für x die ganze Peripherie b setzet, so bekommet ihr $mab^{2n+m,:m} : (4n+2m) b^{2n:m} = mab : (4n+2m)$.

Der 3. Zusatz.

118. Dannenhero verhält sich überhaupt die Spiral-Fläche zu dem umschriebenen Circul wie $mab : (4n+2m)$ zu $\frac{1}{2} ab$, das ist, wie $2m$ zu $4n+2m$, oder wie m zu $2n+m$.

Der 4. Zusatz.

Tab. IX. Fig. 78.

119. Setzet, daß der Bogen BC sich zu E C verhalten solle, wie die Abscisse in einer algebraischen Linie zu ihrer Semiordinate.

Und es sey der Bogen $BC = x$, $AE = y$, $AC = r$; so ist $EC = r - y$, $CD = dx$ und

$$AC : CD = AE : EG$$
$$r \quad dx \quad y \quad ydx:r$$

folgends das Element oder der Sector AEG $\frac{1}{2} y^2$

$\frac{1}{2}y^2dx : r$. Setzet nun es sey BC die Abscisse, EC die Semiordinate einer Parabel, so ist

$$ax = r^2 - 2ry + yy$$

$$dx = (2ydy - 2rdy) : a$$

$$\frac{1}{2}y^2dx : r = (y^3dy - ry^2dy) : ar$$

$$\int \frac{1}{2}y^2dx : r = y^4 : 4ar - y^3 : 3a$$

Der 5. Zusatz.

120. Ihr könnet auch den Raum BFC finden, wenn ihr das Element GDCE suchet, welches ihr findet, wenn ihr CD + EG mit $\frac{1}{2}$FC multiplicitet (§. 157. *Geom.*), weil ihr es als ein Trapezium ansehen könnet, dessen bases CD und EG parallel sind. Nun ist CD + EG $= dx + ydx : r$ und $\frac{1}{2}$EC $= \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}y$. Derowegen das verlangte Element $(r^2dx - y^2dx) : 2r$. Nehmet nun wie in dem vorigen Exempel (§. 119) $dx = (2ydy - 2rdy) : a$, so ist das besondere Element $(ry^2dy + r^2ydy - y^3dy - r^3dy) : ar$, dessen Integrale $y^3 : 3a + ry^2 : 2a - y^4 : 4ar - r^2y : a$ den verlangten Raum giebet. Tab.IX. Fig.78.

Die 17. Aufgabe.

121. Die Fläche eines jeden Cörpers zu finden, der erzeuget wird, indem eine krumme Linie sich um ihre Axe beweget. Tab.IX. Fig.75.

Auf-

Auflösung.

Setzet die Verhältnis des halben Diameters zu der Peripherie $= r : c$, die Abscisse $AP = x$, die Semiordinate $PM = y$, so ist $Pp = dx$, $mR = dy$, $Mm = V(dx^2 + dy^2)$ (§. 172. *Geom.*) und die Peripherie, welche mit PM beschrieben wird, $= cy : r$. Daher das Element der Fläche $cyV(dx^2 + dy^2) : r$. Wenn ihr nun für dx^2 oder dy^2 seinen Werth aus der gegebenen Gleichung für die krumme Linie setzet, und das Element hernach integriret; so kommet der Inhalt eines Stückes von der verlangten Fläche heraus.

Der 1. Zusatz.

Tab. IX. Fig. 75.

122. Es sey AMP ein Triangel, dessen Höhe $= r$, die Grundlinie $= a$, so ist $ay = rx$ (§. 184. *Geom.* & §. 137. P. I. *Algebr.*) und dannenhero

$$ady : r = dx$$

$$a^2dy^2 : r^2 = dx^2$$

$$cyV(dx^2 + dy^2) : r = cyV(a^2dy^2 + r^2dy^2 : r^2$$

$$cyV(dx^2 + dy^2) : r = cydyV(a^2 + r^2) : r^2$$

$$\int cyV(dx^2 + dy^2) : r = cy^2(a^2 + r^2) : 2r^2$$

Setzet für y die Höhe r; so kommet die Fläche des Coni heraus $\frac{1}{2}cV(r^2 + a^2)$. Da nun

nun $V(r^2+a^2)$ seine Seite ist; so sehet ihr, daß die Kegel-Fläche einem Triangel gleich sey, dessen Grund-Linie die Peripherie der Grundfläche des Kegels und die Höhe seiner Seite gleich ist.

Der 2. Zusatz.

123. Wenn ihr für die beschreibende Linie einen halben Circul annehmet, so findet ihr die Kugel-Fläche. Da nun im Circul

$$2rx - xx = y^2$$

so ist $2rdx - 2xdx = 2ydy$

$$(rdx - xdx) : y = dy$$

$$(r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2) : y^2 = dy^2$$

$$cy\sqrt{(dx^2+dy^2)} : r = cy\sqrt{(dx^2+(r^2dx^2 - 2rxdx^2+x^2dx^2) : (2rx - xx))} : r = cy\sqrt{(2rxdx^2 - x^2dx^2 + r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2 : (2rx - xx))} : r = cy\sqrt{(r^2dx^2 : y^2)} : r = cyrdx : ry = cdx.$$

$$\int cdx = cx$$

Setzet für x, den Diameter $2r$, so ist die ganze Kugel-Fläche $2cr$.

Der 3. Zusatz.

124. Da nun die Fläche des grösten Circuls $\frac{1}{2}cr$; so ist die Fläche der Kugel vier-

mahl so groß als ihr gröster Circul. Hingegen jedes Stücke der Kugel-Fläche verhält sich zu der gantzen wie cx zu $2cr$, das ist, wie x zu $2r$, oder die Höhe des Stückes der Kugel zu dem gantzen Diameter.

Der 4. Zusatz.

125. Es sey die beschreibende Linie eine Parabel, so findet ihr die Fläche eines Parabolischen After-Kegels. Da nun in der Parabel

$$ady = 2ydy$$

so ist $dx^2 = 4y^2dy^2 : a^2$

$cyV(dx^2+dy^2) : r = cyV(4y^2dy^2+a^2dy^2 : a^2) : r = cydyV(4yy+aa) : ar$

Setzet $V(4yy+aa) = v$

so ist $4yy+aa = v^2$

$$8ydy = 2vdv$$

$cydyV(4yy+aa) : ar = cv^2dv : 4ar$

$\int cv^2dv : 4ar = cv^3 : 12ar = (4cyy+caa)V(4yy+aa) : 12ar - ca^2 : 12r$ (§. 93).

Setzet r für y, so habet ihr die Fläche des gantzen After-Kegels $(4crr+caa)V(4rr+aa) : 12ar - ca^2 : 12r$.

Von

Von der Rectification der krummen Linien.

Die 4. Erklärung.

126. Eine krumme Linie rectificiren heisset so viel als die Länge derselben finden.

Der 1. Zusatz.

127. Wenn die beyden Semiordinaten PM und pm einander unendlich nahe sind, so ist der Bogen Mm das Element des Bogens AM, das ist, $V(dx^2 + dy^2)$. Tab. IX. Fig. 75.

Der 2. Zusatz.

128. Derowegen wenn ihr vor dx^2 oder dy^2 den Werth aus der Natur der krummen Linie setzet, und das besondere Element integriret; so habet ihr die krumme Linie oder ihren Bogen AM rectificiret.

Der 3. Zusatz.

129. Ihr könnet auch das Element Mm finden, wenn ihr setzet PM : TM = dy : Mm.

Die 18. Aufgabe.

130. Die Parabel zu rectificiren.

Auflösung.

In der Parabel ist $ax = y^2$

$$adx = 2ydy$$

$$a^2dx^2 = 4y^2dy^2$$

$$dx^2 = 4y^2dy^2 : a^2$$

$$V(dx^2 + dy^2) = V(dy^2 + 4y^2dy^2 : a^2)$$
$$\text{das ist} \quad = dy\,V(aa + 4y^2) : a$$

Damit ihr nun dieses Element integriren könnet, so ziehet (§. 95. P. I.) die Wurtzel aus $V(aa + 4y^2)$. Es ist nemlich

$$n = 2, m = 1, P = a^2 \quad Q = 4y^2 : a^2$$

$$P^{m:n} = + a = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = \tfrac{1}{2} a . 4y^2 : a^2 = + 2y^2 : a = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\tfrac{1}{2} y^2 : a . 4y^2 : a^2 = -2y^4 : a^3 = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} QC = -\tfrac{3}{6} . -2y^4 : a^3 . 4y^2 : a^2 = +4y^6 : a^5 = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\tfrac{5}{8} . 4y^6 : a^5 . 4y^2 : a^2 = -10y^8 : a^7$$

u. s. w. unendlich fort.

Demnach ist $V(aa + 4y^2) = a + \frac{2y^2}{a} - \frac{2y^4}{a^3} + \frac{4y^6}{a^5} - \frac{10y^8}{a^7}$ &c. und daher $dy\,V(aa$

+4

$+4y^2) : a = dy + \frac{2y^2dy}{a^2} - \frac{2y^4dy}{a^4} + \frac{4y^6dy}{a^6}$

$- \frac{10y^8dy}{a^8}$ &c. Deren Integral $y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} - \frac{10y^9}{9a^8}$ &c. Die Länge des Bogens exprimiret.

Die 19. Aufgabe.

131. Die Parabel zu rectificiren, in welcher $ax^2 = y^3$.

Auflösung.

Weil $ax^2 = y^3$

$2axdx = 3y^2dy$

$4a^2x^2dx^2 = 9y^4dy^2$

$dx^2 = 9y^4dy^2 : 4a^2x^2 = 9ydy^2 : 4a$

$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \sqrt{((9ydy^2+4ady^2) : 4a)} =$
$dy\sqrt{((9y+4a) : 4a)}$

Setzet $\sqrt{((9y+4a) : 4a)} = v$

so ist $9y+4a = 4av^2$

$9dy = 8avdv$

$$dy\sqrt{(9y+4a:4a)} = \frac{8}{9}av^2\,dv$$

$$\int dy\sqrt{(9y+4a:4a)} = \frac{8}{27}av^3 =$$

$$\frac{8}{27}(9y+4:4)\sqrt{(9y+4:4)} = \frac{2}{27}(9y+4)^{\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt{(9y+4)} = \frac{1}{27}(9y+4)\sqrt{(9y+4)} - \frac{8}{27}$$

(§. 93.), wenn $y = o$.

Die 20. Aufgabe.

132. Unendliche Parabeln zu rectificiren.

Auflösung.

Für unendliche Parabeln ist

$$y^n = a^{n-1}x = x, \text{ wenn } a = 1.$$

$$ny^{n-1}\,dy = dx$$

$$n^2y^{2n-2}\,dy^2 = dx^2$$

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \sqrt{(n^2y^{2n-2}\,dy^2+dy^2)}$$
$$= dy\sqrt{(n^2y^{2n-2}+1)}.$$

Ziehet nun aus $\sqrt{(1+n^2y^{2n-2}}$ die Wurzel (§. 95. P. I.), und setzet der Kürtze halber $2n-2 = r$, so ist in dem Newtonischen Lehrsatze $m = 1$, $n = 2$, $P = 1$, $Q = n^2y^r$

$$P^{m:n} = 1 = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = \frac{1}{2}n^2y^r = B$$

$\frac{m-n}{2n}$ $BQ = -\frac{1}{4}.\frac{1}{2}n^2y^r.n^2y^r = -\frac{1}{8}n^4y^{2r} = C$

$\frac{m-2n}{3n}$ $CQ = -\frac{3}{6}.-\frac{1}{8}n^4y^{2r}.n^2y^r = +\frac{1}{16}n^6y^{3r}$
$= D$

$\frac{m-3n}{4n}$ $DQ = -\frac{5}{8}.\frac{1}{16}n^6y^{3r}.n^2y^r = -\frac{5}{128}n^8y^{4r} =$
E &c.

Demnach ist $dy\,V(1+n^2y^{2n-2}) = dy + \frac{1}{2}n^2y^r dy - \frac{1}{8}n^4y^{2r}dy + \frac{1}{16}n^6y^{3r}dy - \frac{5}{128}n^8y^{4r}dy$ u. s. w. unendlich fort, dessen Integral $y + \frac{n^2y^{r+1}}{2(r+1)} - \frac{n^4y^{2r+1}}{8(2r+1)} + \frac{n^6y^{3r+1}}{16(3r+1)} - \frac{5n^8y^{4r+1}}{128(4r+1)}$ u. s. w. unendlich fort, die Länge unendlicher Parabeln ausdrucket. Wollet ihr für r seinen Werth $2n-2$ in die Stelle setzen, so bekommet ihr $y + \frac{n^2y^{2n-1}}{2(2n-1)} - \frac{n^4}{8}$
$y^{4n-3} + \frac{n^6y^{6n-5}}{16(6n-5)} - \frac{5n^8y^{8n-7}}{128(8n-7)}$ &c.
$(4n-3)$

Es sey z. E. $n=2$, so bekommet ihr $y + \frac{4y^3}{3.2} - \frac{16y^5}{8.5} + \frac{4.16y^7}{16.7}$, &c. das ist, $y + \frac{2y^3}{3} - \frac{2y^5}{5} + \frac{4y^7}{7}$ &c. für die Apollonische Pa-

rabel, welche Reihe mit der oben gefundenen übereinkommet, wenn ihr $a = 1$ setzet.

Die 21. Aufgabe.

133. Aus dem gegebenen Tangente eines Circul-Bogens den Bogen zu finden.

Auflösung.

Tab. IX. Fig. 76. Es sey der Tangens KB $= x$, BC $= 1$, so ist SK $= dx$, KC $= \sqrt{(1+xx)}$, SL $= x\,dx : \sqrt{(1+xx)}$, wenn nemlich KC und SC einander unendlich nahe sind. Da nun bey L und B rechte Winckel sind (§. 48) und BKC $=$ KSL, weil KCL unendlich kleine ist (§. 101. *Geom.*); so ist KC : BC $=$ SK : KL (§. 163 *Geom.*) das ist:

$$\sqrt{(1+x^2)} : 1 = dx : \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

Ferner KC : KL $=$ NC : Nn (§. 163. *Geom.*)

$$\sqrt{(1+x^2)} : \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}} = 1 : \frac{dx}{1+x^2}$$

Wenn ihr nun dx durch $1 + x^2$ würcklich dividiret, so bekommet ihr für das Element Nn des Bogens BN $dx - x^2\,dx + x^4\,dx - x^6\,dx + x^8\,dx - x^{10}\,dx$ u. s. w. unendlich fort, dessen Integral $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ u. s. w. unendlich fort

den

den Bogen BN exprimiret, dessen Tangens BK = x.

Der 1. Zusatz.

134. Der Tangens des Bogens von 45° ist dem Radio BC gleich, und also wird $x = 1$, folgends der Bogen von 45° oder der halbe Quadrant $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. Setzet ihr aber den gantzen Diameter eines, so ist der Quadrante $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c.

Der 2. Zusatz.

135. Derowegen verhält sich das Quadrat des Diameters zu der Circul-Fläche wie der Diameter zu dem Quadranten von der Peripherie (§. 104).

Anmerckung.

136. Ihr hättet auf eben diese Art den Circul quadriren können (§. 104).

Die 22. Aufgabe.

137. Aus dem gegebenen Bogen eines Circuls, der kleiner ist als ein Quadrant, den Tangentem zu finden.

Auflösung.

Wenn der Tangens x ist, so ist der Bogen $v = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$ &c. (§. 133).

Setzet $x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7$ &c. weil nun

$$-v + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \text{ \&c.} = 0 \text{ und}$$

$x^3 = a^3v^3 + 3a^2bv^5 + 3ab^2v^7$ &c.
$+ 3a^2cv^7$ &c. } (§. 91.
$x^5 = + a^5v^5 + 5a^4bv^7$ &c. } P. I.)
$x^7 = + a^7v^7$ &c.)

so ist

$-v = -v$

$x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7$ &c.

$-\frac{1}{3}x^3 = -\frac{1}{3}a^3v^3 - a^2bv^5 - ab^2v^7$ &c.
$- a^2cv^7$ &c.

$+\frac{1}{5}x^5 = +\frac{1}{5}a^5v^5 + a^4bv^7$ &c.

$-\frac{1}{7}x^7 = -\frac{1}{7}a^7v^7$ &c.

demnach

$a - 1 = 0$ $\quad$ $b - \frac{1}{3} = 0$ $\quad$ $c - a^2b + \frac{1}{5}a = 0$

$a = 0$ $\quad$ $b = \frac{1}{3}$ $\quad$ $c = b - \frac{1}{5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$

$= \frac{5 - 3}{15} = \frac{2}{15}$

$d - ab^2 - a^2c + a^4b - \frac{1}{7}a^7 = 0$

$d = b^2 + c + \frac{1}{7} - b = \frac{1}{9} + \frac{2}{15} + \frac{1}{7} - \frac{1}{3}$

$= \frac{2}{15} + \frac{1}{7} - \frac{2}{9} = \frac{126 + 135 - 210}{945} = \frac{51}{945}$

$= \frac{17}{315}$

Setzet nun diese gefundene Werthe für a, b, c, d &c. in die angenommene Reihe für

den

den Tangentem; so bekommet ihr $x = v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{15}v^5 + \frac{17}{315}v^7$ &c.

Die 23. Aufgabe.

138. Aus dem gegebenen Sinu eines Bogens den Bogen, der kleiner als ein Quadrant ist, zu finden.

Auflösung.

Wenn der halbe Diameter des Circuls r, der Sinus des Bogens, oder die Semiordinate y, der Sinus versus oder die Abscisse x ist; so ist die Æquation des Circuls

$$2rx - xx = yy$$

daher $2rdx - 2xdx = 2ydy$

$$dx = ydy : (r - x)$$

$$dx^2 = y^2 dy^2 : (r^2 - 2rx + xx)$$

das ist $= y^2 dy^2 : (r^2 - y^2)$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(y^2 dy^2 + r^2 dy^2 - y^2 dy^2 : (r^2 - y^2))} = rdy : \sqrt{(r^2 - y^2)}.$$

Damit dieses Element des Bogens zum integriren geschickt werde, so ziehet aus $1 : (r^2 - y^2)$ die Wurzel in der That (§. 95. P. 1.). Es ist aber $m = -1$, $n = 2$, $P = r^2$, $Q = -y^2 : r^2$

Pm

$P^{m:n} = r^{-1} = 1:r = A$

$\frac{m}{n} AQ = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r} \cdot -\frac{y^2}{r^2} = +\frac{y^2}{2r^3} = B$

$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{3}{4} \cdot \frac{y^2}{2r^3} \cdot -\frac{y^2}{r^2} = +\frac{3y^4}{8r^5} = C$

$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{5}{8} \cdot \frac{3y^4}{8r^5} \cdot -\frac{y^2}{r^2} = +\frac{5y^6}{16r^7} = D$

$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{7}{8} \cdot \frac{5y^6}{16r^7} \cdot -\frac{y^2}{r^2} = +\frac{35y^8}{128r^9} = E$

u. s. w. unendlich fort.

Also ist $rdy(r^2 - y^2)^{-1:2} = dy + \frac{y^2 dy}{2r^2} + \frac{3y^4 dy}{8r^4} + \frac{5y^6 dy}{16r^6} + \frac{35y^8 dy}{128r^8}$ &c. dessen Integral $y + \frac{y^3}{6r^2} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6} + \frac{35y^9}{1152r^8}$ &c. den verlangten Bogen durch seinen Sinum ausdrucket. Wenn ihr besser sehen wollet, wie die Reihe unendlich fortgehet, so nennet das erste Glied A, das andere B, das dritte C u. s. w. so findet ihr $y + \frac{1.1.y^2}{2.3r^2} A + \frac{3.3y^2}{4.5r^2} B + \frac{5.5y^2}{6.7r^2} C + \frac{7.7y^2}{8.9r^2} D + \frac{9.9y^2}{10.11r^2} E$ &c.;

Zusatz.

139. Weil der Bogen $v = y + \frac{y^3}{6r^2} + \frac{3y^5}{40r^4}$

$+ \frac{5y^7}{112r^6} + \frac{35y^9}{1152r^8}$ &c. so findet ihr, wie in der 22 Aufgabe (§. 137) $y = v - \frac{v^3}{6r^2} + \frac{v^5}{120r^4}$

$+ \frac{v^7}{5040r^6} + \frac{v^9}{362880r^8}$ &c. $= v - \frac{v^3}{2.3r^2}$

$+ \frac{v^5}{1.2.3.4.5r^4} + \frac{v^7}{1.2.3.4.5.6.7r^6}$

$+ \frac{v^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9r^8}$ &c.

Das ist, wenn ihr das erste Glied A, das andere B, das dritte C &c. setzet, $y = v - \frac{v^2 A}{2.3r^2}$

$+ \frac{v^2 B}{4.5r^2} + \frac{v^2 C}{6.7r^2} + \frac{v^2 D}{8.9r^2}$ &c.

Die 24. Aufgabe.

140. Aus dem gegebenen Sinu verso den Bogen des Circuls zu finden.

Auflösung.

Wenn der Diameter des Circuls $2r$, die Abscisse oder der Sinus versus $= x$ ist, so ist für den Circul

$$2rx - xx = yy$$

$$2rdx - 2xdx = 2ydy$$

$$(rdx - xdx) : y = dy$$

$$(r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2) : y^2 = dy^2$$

$V(dx^2 + dy^2) = V(dx^2 + (r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2) : (2rx - xx)) = V((2rxdx^2 - x^2dx^2 + r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2) : (2rx - xx)) = rdx : V(2rx - xx) = rdx(2rx - x^2)^{-1:2}$, oder wenn ihr $2r = 1$ setzet, $\frac{1}{2}dx(x - x^2)^{-1:2}$. Damit dieses Element zum integriren geschickt werde, so ziehet aus $x - x^2$ die Wurzel in der That, (S. 95. P. I.).

Es ist aber $m = -1$, $n = 2$, $P = x$, $Q = -x$, und demnach

$P^{m:n} = x^{-1:2} = A$

$\frac{m}{n} AQ = -\frac{1}{2} \cdot x^{-1:2} \cdot -x = \frac{1}{2}x^{1:2} = B$

$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}x^{1:2} \cdot -x = \frac{1.3}{2.4}x^{3:2} = C$

$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{5}{6} \cdot \frac{1.3}{2.4}x^{3:2} \cdot -x = \frac{1.3.5}{2.4.6}x^{5:2} = D$

$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{7}{8} \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6}x^{5:2} \cdot -x = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^{7:2}$ &c.

Das

Daher ist $\frac{1}{2}dx : V(x - xx) = \frac{1}{2}x^{-1:2}dx + \frac{1}{4}x^{1:2}dx + \frac{1.3}{4.4}x^{3:2}dx + \frac{1.3.5}{4.4.6}x^{5:2}dx + \frac{1.3.5}{4.4.6.8}x^{7:2}dx$ &c. und folgends der Bogen

$$AP = x^{1:2} + \frac{1}{2.3}x^{3:2} + \frac{1.3}{2.4.5}x^{5:2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^{7:2} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}x^{9:2} \text{ &c. oder}$$

$$V x\left(1 + \frac{1}{2.3}x + \frac{1.3}{2.4.5}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}x^4 \text{ &c.}\right)$$

Zusatz.

141. Wollet ihr den Sinum versum durch den Bogen ausdrucken, so werdet ihr auf die Art, wie oben (§. 137) finden $x = \frac{v^2}{1.2} - \frac{v^4}{1.3.3.4} + \frac{v^6}{1.2.3.4.5.6}$ &c. = (wenn ihr das erste Glied A, das andere B u. s. w. setzet)

$$\frac{v^2}{1.2} - \frac{v^2 A}{3.4} + \frac{v^2 B}{5.6} - \frac{v^2 C}{7.8} \text{ &c.}$$

Von

Von der Cubatur der Cörper.

Die 5. Erklärung.

142. Cubiren heisset den Inhalt eines Cörpers finden.

Der 1. Zusatz.

143. Wenn ein Cörper erzeuget wird, indem eine Figur sich um ihre Axe herum beweget, so beschreibet jede Semiordinate einen Circul und dannenhero ist das Element desselben das Product aus einem Circul, der mit der Semiordinate beschrieben wird, in die Differential der Abscisse. Wenn ihr demnach die Verhältnis des Radii zu der Peripherie setzet $r : p$, so ist die Peripherie des gedachten Circuls $py : r$ und der Inhalt $py^2 : 2r$ (§. 162. *Geom.*), folgends das Element $py^2\,dx : 2r$.

Der 2. Zusatz.

144. Wenn ihr demnach den Werth von y^2 durch x aus der Gleichung für die gegebene Figur setzet und das Element integriret; so habet ihr den verlangten Inhalt des Cörpers.

Die 25. Aufgabe.

145. Den Conum zu cubiren.

Auflösung.

Weil der Conus von einem Triangel beschrieben wird (§. 35. *Geom.*), so habet ihr (wenn

(wenn die Höhe des Triangels a, die Grundlinie r ist)

$$rx = ay$$

$$r^2x^2 : a^2 = y^2$$

$$py^2\,dx : 2r = prx^2\,dx : 2a^2$$

$$\int py^2\,dx : 2r = prx^3 : 6a^2$$

Wenn ihr den gantzen Kegel verlanget, so setzet a für x, und ihr findet seinen Inhalt $pra^3 : 6a^2 = \frac{1}{6} pra = \frac{1}{2} pr . \frac{1}{3} a$, das ist, wenn ihr die Grundfläche $\frac{1}{2} pr$ durch den dritten Theil der Höhe $\frac{1}{3} a$ multipliciret.

Die 26. Aufgabe.

146. **Die Kugel zu cubiren.**

Auflösung.

Die Kugel wird von einem halben Circul beschrieben (§. 27. *Geom.*), in welchem (§. 198. P. I.)

$$2rx - xx = yy$$

daher ist $py^2dx : 2r = pxdx - px^2dx : 2r$

$$\int py^2dx : 2r = \frac{1}{2} px^2 - px^3 : 6r$$

Wenn ihr die gantze Kugel verlanget, so setzet $2r$ oder den Diameter für x oder die Hö-

he des Kugel-Stückes, und ihr bekommet für ihren Inhalt $2pr^2 - 8pr^2 : 6 = 4\,pr^2 : 6 = \frac{2}{3}pr^2$.

Zusatz.

147. Der Inhalt eines umschriebenen Cylinders, dessen Höhe nemlich dem Diameter, die Grund-Fläche dem grösten Circul der Kugel gleichet, ist pr^2, und demnach verhält er sich zur Kugel wie pr^2 zu $\frac{2}{3}pr^2$, das ist, wie 3 zu 2.

Die 27. Aufgabe.

148. Einen parabolischen Aster-Kegel zu cubiren.

Auflösung.

In der Parabel ist

$$y^2 = ax$$

daher $py^2dx : 2r = apxdx : 2r$

$$\int py^2dx : 2r = apx^2 : 4r = py^2x : 4r$$

Wenn die Höhe des gantzen Kegels b und der halbe Diameter in der Grundfläche r ist; so ist der Inhalt desselben $bpr^2 : 4r = \frac{1}{4}bpr$.

Zusatz.

149. Da nun der umschriebene Cylinder $\frac{1}{2}bpr$ ist, so verhält sich dieser zu dem parabolischen Aster-Kegel wie $\frac{1}{2}bpr$ zu $\frac{1}{4}bpr$, das ist, wie 2 zu 1.

Die

Die 28. Aufgabe.

150. Unendliche parabolische After-Kegel auf einmahl zu cubiren.

Auflösung.

Es sey der Parameter $= 1$, so ist für unendliche Parabeln

$$y^m = x$$

$$y = x^{1:m}$$

$$y^2 = x^{2:m}$$

$$\int p y^2 dx : 2r = p x^{2:m} dx : 2r$$

$$\int p y^2 dx : 2r = m x^{2+m:m} : (4+2m) r = mpx$$
$$y^2 : (2m+4) r.$$

Die 29. Aufgabe.

151. Eine elliptische After-Kugel zu cubiren.

Auflösung.

Es sey der kleine Diameter in der Ellipsi $2r$, der grosse $= 2a$, so ist

$$yy = rr - r^2 x^2 : a^2 \quad (\S.\ 253.\ P.\ I.)$$

$$p y^2 dx : 2r = \tfrac{1}{2} prdx - prx^2 dx : 2a^2$$

$$\int p y^2 dx : 2r = \tfrac{1}{2} prx - prx^3 : 6a^2.$$

Setzet für x die gantze grosse Axe $2a$, so kominet der Inhalt des gantzen Cörpers $apr - \frac{2}{6} apr = \frac{4}{6} apr = \frac{2}{3} apr$.

Der 1. Zusatz.

152. Der umschriebene Cylinder ist apr (§. 221. *Geom.*) und demnach verhält er sich zu der elliptischen After-Kugel wie apr zu $\frac{2}{3} apr$, das ist, wie 1 zu $\frac{2}{3}$, oder 3 zu 2.

Der 2. Zusatz.

153. Die Kugel, deren Diameter dem grossen Diameter der Ellipsis gleichet, ist $2a^3p : 3r$ (§. 147). Demnach verhält sie sich zu der elliptischen After-Kugel wie $2a^3p : 3r$ zu $\frac{2}{3} apr$ das ist, wie a^2 zu r^2, oder wie das Qvadrat der grossen Axe zu dem Qvadrate der kleinen.

Der 3. Zusatz.

154. Die Kugel, deren Diameter dem kleinen Diameter der Ellipsis gleichet, ist $\frac{2}{3} pr^2$ (§. 147). Derowegen verhält sie sich zu der elliptischen After-Kugel wie $\frac{2}{3} pr^2$ zu $\frac{2}{3} apr$, das ist wie r zu a, oder die kleine Axe zu der grossen.

Die 30. Aufgabe.

155. Einen hyperbolischen After-Kegel zu cubiren.

Auflösung.

Es sey die Zwerch-Axe $= 2a$, die kleine A-

xe

$re = 2r$, die Abscisse $= x$, die Semiordinate $= y$, so ist (§. 269. P. I.)

$$rr : aa = y^2 : 2ax + xx$$

$$y^2 = (2ar^2x + r^2x^2) : a^2$$

$$py^2dx : 2r = prxdx : a + prx^2dx : 2a^2$$

$$\int py^2dx : 2r = prx^2 : 2a + prx^3 : 6a^2$$

Setzet für x die gantze Höhe des After-Kegels b, so kommet sein Inhalt $prb^2 : 2a + prb^3 : 6a^2$.

Die 31. Aufgabe.

156. Den Inhalt des Cörpers zu finden, der erzeuget wird, indem der Raum zwischen der Logarithmischen Linie MI und der geraden Linie PH sich um PH herum beweget. Tab. IX. Fig. 81.

Auflösung.

In der Logarithmischen Linie, deren Subtangens $= a$, ist

$$ydx = ady \quad (\S.\ 112)$$

$$dx = ady : y$$

$$py^2dx : 2r = apy^2dy : 2ry = apydy : 2r$$

$$\int py^2dx : 2r = apy^2 : 4r$$

Nehmet x für die letzte Semiordinate AB an, so ist der Inhalt des ganzen Cörpers $\frac{1}{4}apr$, der durch die Bewegung des unendlichen Raumes IBAH beschrieben wird.

Die 32. Aufgabe.

157. Den Inhalt eines Cörpers zu finden, der beschrieben wird, indem sich eine halbe Parabel ANS um ihre Semiordinate beweget.

Auflösung.

Tab. IX. Fig. 75. In diesem Falle ist das Element gleich dem Producte aus einem Circul, der mit MT der Differentz zwischen der Abscisse AP und AS beschrieben wird, in die Differential der Semiordinate. Setzet nun AS $= x$, NS $= b$, AP $= x$, so ist PS $=$ MT $= x - x$. Wenn nun die Verhältnis des Radii zur Peripherie $r : p$, so findet ihr die Peripherie, so mit MT beschrieben worden $(rp - px) : r$, folgends den Circul $(r^2p - 2rpx + px^2) : 2r$. Dannenhero ist das Element $(r^2pdy - 2rpxdy + px^2dy) : 2r$. Nun ist in der Parabel, wenn der Parameter $= 1$, $y^2 = x$ (§. 217. P. I.) und $y^4 = x^2$. Daher das Element $\frac{1}{2}rpdy - py^2dy + py^4dy : 2r$, dessen Integral $\frac{1}{2}rpy - \frac{1}{3}py^3 + py^5 : 10r$ das Stücke des Cörpers exprimiret, welches von MN T beschrieben worden.

Wenn

Wenn ihr für y^2 seinen Werth x setzet, so habet ihr für eben dasselbe Stücke $\frac{1}{2}rpy - \frac{1}{3}pxy + px^2y : 10r$. Setzet nun ferner r für x und b für y; so bekommet ihr für den gantzen Cörper $\frac{1}{2}rpb - \frac{1}{3}prb + pr^2b : 10r = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10})bpr = (30 - 20 + 6)bpr = \frac{4}{15}bpr$.

60

Anmerckung.

158. Auf gleiche Weise könnet ihr den Inhalt der Cörper finden/ wenn ihr setzet/ daß sich eine Fläche um eine andere Linie/ als z. E. um den Tangentem oder die Subnormal-Linie beweget.

Von der verkehrten Methode der Tangentium.

Die 6. Erklärung.

159. Die verkehrte Methode der TANGENTIUM (Methodus Tangentium inversa) ist diejenige, welche zeiget, wie man aus dem gegebenen Subtangente, Tangente, der Normal-Linie oder Subnormal-Linie ꝛc. die Gleichung finden kan, welche die Natur der Linie erkläret.

Zusatz.

160. Setzet nemlich die gegebenen Linien ihrem Werthe gleich, darinnen die Differential-Grössen anzutreffen sind, so bekommet ihr die Differential-Gleichung für die gesuchte Linie. Wenn ihr nun selbige integriret, so bekommet ihr die gesuchte Gleichung.

Die 33. Aufgabe.

161. Eine krumme Linie zu finden, deren Subtangens $= 2yy : a$.

Auflösung.

Weil der Subtangens in einer jeden algebraischen Linie $= y\,dx : dy$, so ist

$$2y^2 : a = y\,dx : dy$$

$$2y^2\,dy = a\,y\,dx \quad \text{(durch } y\text{)}$$

$$2y\,dy = a\,dx$$

$$y^2 = ax$$

Welche Gleichung zeiget, daß die verlangte Linie eine Parabel sey.

Anmerckung.

162. Hätte man gesagt, daß der Subtangens solte $2x$ seyn (ich setze aber beständig, wie vorhin, daß x allezeit die Abscisse, y die Semiordinate bedeute); so bekämet ihr $y\,dx = 2x\,dy$. Wollet ihr nun diese Gleichung zum integriren geschickt machen, so sehet ihr, daß, wenn ihr x durch y exprimiren wollet, ihr y^2 durch eine beständige Grösse dividiren müsset, und dannenhero für $2x$ annehmen $2y^2 : a$.

Die 34. Aufgabe.

163. Eine krumme Linie zu finden, deren Subnormal-Linie beständig von einer Grösse ist, Z. E. $= a$,

Auflösung.

Die Subnormal-Linie ist $ydy : dx$ (§. 46). Demnach

$$ydy : dx = a$$

$$ydy = adx$$

$$\tfrac{1}{2}y^2 = ax$$

$$y^2 = 2ax$$

Also ist die verlangte Linie eine Parabel, deren Parameter der doppelten Subnormal-Linie gleich ist.

Die 35. Aufgabe.

164. Eine krumme Linie zu finden, deren Subtangens die mittlere Proportional-Linie ist zwischen x und y.

Auflösung.

Es ist $ydx : dy = \sqrt{xy}$

$$ydx = dy\sqrt{xy} = x^{1:2}y^{1:2}dy$$

$$dx = y^{-1:2}x^{1:2}dy$$

$$x^{-1:2}dx = y^{-1:2}dy$$

$$2x^{1:2} = 2y^{1:2}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{y}$$

$$x = y$$

Also ist die verlangte Figur ein gleichschenckelichter rechtwincklichter Triangel. Ihr könnet aber auch setzen

$$\sqrt{x} + \sqrt{a} = \sqrt{y}$$

so ist $x + 2\sqrt{ax} + a = y$

$$2\sqrt{ax} = y - x - a$$

$$4ax = y^2 - 2yx + xx + 2ax - 2ay + aa$$

$$y^2 - 2yx + x^2 - 2ax - 2ay + aa = 0$$

welches eine Gleichung an dem Circul ist, darinnen der Ursprung von x und y auf besondere Weise (§. 362. P. I.) zu determiniren.

Ihr könnet auch setzen, daß $\sqrt{x} - \sqrt{a} = \sqrt{y}$.

Die 36. Aufgabe.

165. Eine krumme Linie zu finden, deren Subnormal-Linie $= r - x$.

Auflösung.

Es ist $ydy : dx = r - x$

$$ydy = rdx - xdx$$

$\frac{1}{2}y^2$

$\frac{1}{2}y^2 = rx - \frac{1}{2}x^2$

$y^2 = 2rx - xx$

Also ist die verlangte Linie ein Circul, dessen Diameter $= 2r$.

Die 37. Aufgabe.

165. Eine Linie zu finden, deren Subnormal-Linie $= \sqrt{ax}$.

Auflösung.

Es ist $ydy : dx = \sqrt{ax} = a^{1:2}x^{1:2}$

$ydy = a^{1:2}x^{1:2}dx$

$\frac{1}{2}y^2 = \frac{2}{3}\sqrt{ax^3}$

$y^2 = \frac{4}{3}\sqrt{ax^3} = \frac{2}{3}\sqrt{4ax^3}$

Also ist das Quadrat der Semiordinate in dieser Linie jederzeit einem parabolischen Raume gleich (§. 91.) und also die quadratrix parabolæ, weil durch ihre Semiordinaten die Parabel qvadriret wird, deren Parameter $4a$.

Die 38. Aufgabe.

167. Eine krumme Linie zu construiren, deren Subtangens einer unveränderlichen Linie gleich ist.

Auflösung.

Es ist

$$ydx : dy = a$$

dx

$$dx = ay^{-1}\,dy$$
$$\int dx = \int ay^{-1}\,dy$$

Wenn ihr $ay^{-1}dy$ (§. 82) integriren woltet, so käme heraus $ay^0 : o = a : o$, das ist, eine unendlich grosse Grösse. Und also gehet die Integration algebraisch nicht an. Da nun aber bekandt ist (§. 61), daß die angenommene Eigenschaft der Logarithmischen Linie zugehöret, in dieser aber die Abscissen x die Logarithmi der Semiordinaten sind (§. 307. P. I.); so muß auch $\int ay^{-1}\,dy\ (= x)$ der Logarithmus der Semiordinate seyn, und dannenhero könnet ihr jederzeit für die Integral von $ay^{-1}\,dy$ oder $ady : y$, den Logarithmum von y oder ly setzen. Es muß aber der Logarithmus in einer Logarithmischen Linie genommen werden, deren Subtangens a ist.

Der 1. Zusatz.

168. Da nun die Differential eines Logarithmi $= ady : y$, so könnet ihr jetzt auch diejenigen Grössen differentiiren, in welchen Logarithmi zu finden. Es sey z. E. ly^n, so ist die Differential $nly^{n-1}ady : y$.

Der 2. Zusatz.

169. Es sey die Differential eines Logarithmi $= dy : (1+y)$; so ist der Logarithmus der Zahl $1+y = \int dy : (1+y)$. Nun ist $1 : (1$

$+y$

$+y) = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4$ u. s. w. wie ihr es findet, wenn ihr in der That dividiret, und daher $dy : (1+y) = dy - ydy + y^2 dy - y^3 dy + y^4 dy$ &c. Derowegen ist $\int dy : (1+y)$ oder der Logarithmus von der Zahl $1+y = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c.

Der 3. Zusatz.

170. Weil nun $l = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. so findet ihr (§. 137); $y = \frac{l}{1} + \frac{l^2}{1.2} + \frac{l^3}{1.2.3} + \frac{l^4}{1.2.3.4} + \frac{l^5}{1.2.3.4.5}$ &c.

Der 4. Zusatz.

171. Ihr sehet zugleich (§. 169), wie die Differentiale der Logarithmischen Grössen integriret werden, wenn man a für den Subtangentem der Logarithmischen Linie annimmet. Es ist z. E. $\int y^n dy : y = y^{n+1} : (n+1)a$, $\int ydy : V(aa + yy)y = (aa + yy)^{3:2} : 3a$ u. s. w.

Anmerckung.

172. Wenn man die Differential-Gleichung nicht integriren kan / so suchet man dieselbe auf die Qvadratur oder Rectification des Circuls / oder Parabel / Hyperbel und Ellipsis zu reduciren / weil diese Linien bekandt sind / und ist vergnüget / wenn man sagen kan / daß die Construction der verlangten Linie von der Qvadratur oder Rectification einer von den gemeldeten Linien dependire: wovon ich noch einige Exempel hieher setzen muß. Ihr habet euch aber zu dem Ende alle Elemente der Flächen und Längen in den Kegel-

gelschnitten bekandt zu machen / damit ihr um so viel leichter wahrnehmet / auf was für eine Qvadratur oder Rectification sich jeder vorkommender Fall reduciren lasse.

Die 39. Aufgabe.

173. Eine krumme Linie zu construiren, in welcher $dz = qdu$.

Auflösung.

Es bedeutet q eine Grösse, die aus veränderlichen und unveränderlichen in Gestalt eines Bruches zusammen gesetzet ist. Beschreibet in unendlichen Fällen die unter der gegebenen Gleichung begriffen sind, eine krumme Linie, deren Abscissen $= v$, die Semiordinaten $= aq$; so ist das Element dieser Linie $aqdu$. Wenn ihr nun dieses durch a dividiret, so bekommet ihr qdu. Derowegen richtet auf eben der Axe für die Abscissen u andere Semiordinaten auf, die $= \int qdu$, das ist, dem Raume gleich sind, der zwischen dieser krummen Linie und ihren Coordinaten enthalten, wenn man ihn durch eine unveränderliche Grösse a dividiret, so bekommet ihr die Linie, deren Differential-Gleichung $dz = qdu$.

Der 1. Zusatz.

174. Es sey $ydx = ady$ oder $dx = \frac{ady}{y}$, so sind die Semiordinaten der Linie von deren Qvadratur die Construction dependiret, $\frac{aa}{y}$.

Da nun die Gleichung einer gleich-

gleichseitigen Hyperbel zwischen ihren Asymptoten (§. 283. P. I.) $aa = zy$: so erkennet ihr daraus die Art der Linie.

Der 2. Zusatz.

175. Wenn in der verlangten Linie der Subtangens $= y\sqrt{(aa+yy)} : a$, so ist $dx = dy\sqrt{(aa+yy)} : a$. Also sind die Semiordinaten der Linie, von deren Quadratur die Construction dependiret, $\sqrt{(aa+yy)}$. Woraus ihr abermahl erkennet, daß es eine gleichseitige Hyperbel sey, denn es sey $AC = CB = a$, $CQ = PM = y$, $QM = CP = x$; so ist $AP = x - a$, $BP = a + x$, folgends $AP.PB = x^2 - a^2$ und $y^2 = x^2 - a^2$ (§. 290. P. I.), und daher $x = \sqrt{(y^2+a^2)} =$ QM. Tab. VI. Fig. 58.

ENDE

des dritten Theiles.

Der

Der vierdte Theil.

Von den Anfangs-Gründen Der Exponential- und Differentio-Differential-Rechnung.

Die 1. Erklärung.

176.

Die Exponential-Rechnung bestehet im Differentiiren und Integriren solcher Grössen, die einen veränderlichen Exponenten haben, als x^x, a^x, und Exponential-Grössen genennet werden.

Die 1. Aufgabe.

177. Eine Exponential-Grösse zu differentiiren.

Auflösung.

Die gantze Kunst kommet darauf an, daß man die Exponential-Grössen auf Logarithmische reducirt, und sie (§. 168) differentiiret. Setzet nemlich

$$x^y = z$$

so ist $y l x = l z$

$l x dy + y dx : x = dz : z$ (§. 168)

$z(l x dy + y dx : x) = dz$

Das ist $x^y (l x dy + y dx : x) = dz$

oder $x^y l x dy + y x^{y-1} dx = dz$

Setzet abermahl

$v^{x^y} = z$

so ist $x^y l v = l z$

$(x^y l x dy + y x^{y-1} dx) l v + x^y dv : v = dz : z$

$z(x^y l x dy + y x^{y-1} dx) l v + z x^y dv : v = dz$

$v^{x^y} x^y l x l v dy + v^{x^y} y x^{y-1} l v dx + v^{x^y} v^{-1} x^y dv = dz$

Auf gleiche Weise verfahret ihr in anderen Fällen.

Die 2. Erklärung.

178. Eine Exponential-Linie wird genennet eine krumme Linie, welche durch eine Exponential-Gleichung erkläret wird, als wenn $x^x = y$.

Zusatz.

179. Wenn ihr die Exponential-Gleichung differentiiret (§. 177) und den Werth von dx in dem Differential-Werthe des Subtangentis und der Subnormal-Linie substituiret; so findet ihr wie in den algebraischen Linien ihren Subtangentem und ihre Subnormal-Linie. Es sey z. E.

$$x^x = y$$

$$ylxdx + ydx = dy$$

$$dx = dy : (ylx + y).$$

$$ydx : dy = ydy : (ylx + y)\,dy = 1 : (1 + lx)$$

Für die Subnormal-Linie ist

$$ydy : dx = (y^2 lx\,dx + y^2 dx) : dx = y^2 lx + y^2 = y^2\,(lx + 1).$$

Die 2. Aufgabe.

180. Die Differential einer logarithmischen Grösse zu integriren.

Auflösung.

Ihr sollet z. E. $xlxdx$ integriren. Setzet

$$x = 1 + y$$

So ist $lx = l(1+y)$

$dx = dy$

$xlxdx = l(1+y)(1+y)dy.$

Nun ist $l(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. Derowegen $l(1+y)(1+y)dy = (1+y)dy(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c.) = (wenn man in der That multipliciret.)

$ydy - \frac{1}{2}y^2dy + \frac{1}{3}y^3dy - \frac{1}{4}y^4dy + \frac{1}{5}y^5dy$ &c.
$+ y^2dy - \frac{1}{2}y^3dy + \frac{1}{3}y^4dy - \frac{1}{4}y^5dy$ &c.

das ist, $ydy + \frac{1}{2}y^2dy - \frac{1}{6}y^3dy + \frac{1}{12}y^4dy - \frac{1}{20}y^5dy$ &c.

folgends die verlangte Integral $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{24}y^4 + \frac{1}{60}y^5 - \frac{1}{120}y^6$ &c. $= \frac{1}{1.2}y^2 + \frac{1}{1.2.3}y^3 - \frac{1}{2.3.4}y^4 + \frac{1}{3.4.5}y^5 - \frac{1}{4.5.6}y^6$ &c. in welcher Reihe $y = x - 1$.

Auf gleiche Manier könnet ihr in anderen Fällen verfahren.

Die 3. Aufgabe.

181. Eine Exponential-Grösse zu integriren.

Auflösung.

Ihr sollet z. E. $(1+y)^{1+y}dy$ integriren.

Setzet

$$(1+y)^{1+y} = 1+v$$

so ist $(1+y)l(1+y) = l(1+v)$

folgends (§. 169)

$$y+\tfrac{1}{2}y^2-\tfrac{1}{6}y^3+\tfrac{1}{12}y^4-\tfrac{1}{20}y^5 \text{ &c.} = v-\tfrac{1}{2}v^2+\tfrac{1}{3}v^3-\tfrac{1}{4}v^4+\tfrac{1}{5}v^5 \text{ &c.}$$

Setzet ferner

$$v = y+ky^2+my^3+ny^4+py^5 \text{ &c.}$$

so ist $v^2 = +y^2+2ky^3+k^2y^4+2kmy^5$ &c.
$+2my^4+2ny^5$ &c.

$v^3 = +y^3+3ky^4+3k^2y^5$ &c.
$+3my^5$

$v^4 = +y^4+4ky^5$ &c.

$v^5 = y^5$ &c. (§. 91 P. I.)

Daher

$$v = y+ky^2+my^3+ny^4+py^5 \text{ &c.}$$
$$-\tfrac{1}{2}v^2 = -\tfrac{1}{2}y^2-ky^3-\tfrac{1}{2}k^2y^4-kmy^5 \text{ &c.}$$
$$-my^4-ny^5$$
$$+\tfrac{1}{3}v^3 = +\tfrac{1}{3}y^3+ky^4+k^2y^5 \text{ &c.}$$
$$+my^5$$

$-\frac{1}{4}v^4 = \quad -\frac{1}{4}y^4 - ky^5$ &c.

$+\frac{1}{5}v^5 = \quad +\frac{1}{5}y^5$ &c.

$-y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{12}y^4 + \frac{1}{20}y^5$ &c. $= 0$

Man bekommet demnach

$1 - 1 = 0$ $\quad k - \frac{2}{2} = 0$ $\quad m - k + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 0$

$1 = 1$ $\quad k = 1$ $\quad m = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$n - \frac{1}{2}k^2 - m + k - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = 0$

$n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = 0$

$n = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$p - km - n + k^2 + m - k + \frac{1}{3} + \frac{1}{20} = 0$

$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{20}$

$p = \frac{1}{3} - \frac{3}{20} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$

Demnach ist $(1+y)^{1+y} = 1 + v = 1 + y + y^2 + \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{3}y^4 + \frac{1}{12}y^5$ &c. folgends $(1+y)^{1+y} dy = dy + y\,dy + y^2\,dy + \frac{1}{2}y^3\,dy + \frac{1}{3}y^4\,dy + \frac{1}{12}y^5\,dy$ &c. Und daher $\int (1+y)^{1+y} dy = y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{15}y^5 + \frac{1}{72}y^6$ &c.

Zusatz.

182. Wenn ihr die Differential einer Exponential-Grösse integriren könnet, so

können ihr auch die Exponential-Linien quadriren.

Die 3. Erklärung.

183. Differentio-differentiiren heisset so viel als die Differential von einer Differential-Grösse finden.

Zusatz.

184. Wenn die Differential dx ist, so nennet ihre Differential oder die Differentio-Differential von x, ddx; die Differential von ddx aber $dddx$ u. s. w.

Die 4. Aufgabe.

185. Eine jede gegebene Differential-Grösse von neuem zu differentiiren.

Auflösung.

Es geschiehet nach den Regeln (§. 13. & seqq.) nach welchen die veränderlichen Grössen differentiiret werden, nur daß man eine Differential-Grösse meistentheils als eine unveränderliche annimmet und daher auch die andere Differential vor nichts hält (§. 4).

EX. Die andere Differential von xdx findet ihr $dx^2 + xd\dot{x}^2$ (§. 16); $d(1:dx) = -ddx:dx^2$ (§. 24); $d(ydy:dx) = (dy^2 - ydy)dx$, wenn ihr dx unveränderlich annehmet, hingegen $= (dy^2dx - ydyddx):dx^2 =$

dy^2:

$dy^2 : dx - ydyddx : dx^2$ (§. 24), wenn ihr dy unveränderlich annehmet; $dV(dx^2 + dy^2) = dyddy : V(dx^2 + dy^2)$ wenn dx unveränderlich; hingegen $dxddx : V(dx^2 + dy^2)$, wenn dy unveränderlich (§. 20) u. s. w.

Anmerckung.

186. Wenn die Rechnung auf gewisse Fälle appliciret wird, so ist nicht schweer zu sehen, welche Differential ihr für unveränderlich annehmen könnet.

Die 4. Erklärung.

187. Wenn eine krumme Linie AFK anfangs die hohle, hernach die erhabene Seite gegen die Axe AE kehret, und immer in einem mit der Axe fortgehet, so heisset der Punct F, wo die Wendung geschiehet, der Wendungs-Punct; hingegen der Wiederkehr-Punct, wenn sie wieder zurücke gegen die Axe kehret. Im Lateinischen nennet man diese Puncte: Puncta flexus contrarii. Tab X. Fig. 86.

Der 1. Zusatz.

188. Wenn die krumme Linie einen Wendungs-Punct hat, so ist klar, daß die Linie AT zunimmet mit der Abscisse AP, bis diese in E kommet, denn so bald sich die Linie wendet, so nimmet die Linie AT wieder ab, und die Abscisse nimmet wie vorhin zu. De-

rowegen könnet ihr AL als die gröste Linie von ihrer Art ansehen.

Der 2. Zusatz.

189. Hingegen wenn die krumme Linie einen Wiederkehrungs-Punct hat, so wächset anfangs die Linie AT zugleich mit der Abscisse bis in L: nach diesem wenn die Linie sich wendet, nimmet die Linie AT zu, hingegen die Abscissen gehen wieder zurücke und nehmen ab, und dannenhero muß in diesem Falle die Linie AE die gröste von ihrer Art werden.

Der 3. Zusatz.

Tab. X. Fig. 86. 190. Da nun $AL = (ydx : dy) - x$ (§ 35), so ist, wenn ihr dx für unveränderlich annehmet, (§ 185)

$$(dy^2 dx - ydxddy) : dy^2 - dx = 0$$

$$dy^2 dx - ydxddy - dy^2 dx = 0$$

$$-ydxddy = 0$$

$$-y$$

$ddy = 0$, oder $ddy = \infty$ (§. 64).

Der 4. Zusatz.

Tab. X. Fig. 87. 88. 191. Wenn die Semiordinaten BM aus einem Puncte B gezogen sind, so ziehet Bm und BM unendlich nahe, und Bt auf Bm perpendicular: dann ist klar, daß an der hohlen

len Seite Bt grösser ist als BO, hingegen an der erhabenen kleiner wird. Derowegen ist in dem Wendungs-Puncte tO = o. Beschreibet nun aus dem Mittelpuncte B den Bogen TH und MR, so sind die Triangel mMR, MBT und THO einander ähnlich, (§. 183. *Geom.*), weil nemlich bey R, H (§. 48) und B rechte Winckel sind, und über dieses HOT = MTB und MmR = MTB in den beyden von MTB nur um einen unendlichen kleinen Winckel HBT und MBm unterschieden sind (§. 101. *Geom.*), und die Ausschnitte des Circuls sind, weil die Winckel MBm und HBT mit HBM einen rechten Winckel machen, auch einander ähnlich. Demnach ist (§. 183. *Geom.*),

$$mR : MR = BM : BT$$
$$dy \quad dx \quad y \quad ydx : dy$$
$$BM : BT = MR : TH$$
$$y : \frac{ydx}{dy} = dx : dx^2 : dy$$
$$BM : BT = TH : HO$$
daher $$MR : TH = TH : NO$$
$$dx : dx^2 : dy = dx^2 : dy \quad dx^3 : dy^2$$

Also ist die Differential von BT oder tH wenn ihr dx für unveränderlich annehmet, $= (dxdy^2 - ydxddy) : dy^2$ (§. 185.) dannenhero $OH + tH = Ot = (dx^3 + dxdy^2 - ydxddy)$

$xddy) : dy^2$. Da nun die Linie tO im Wendungs-Puncte nichts wird, so ist

$$(dx^3 + dxdy^2 - ydxddy) : dy^2 = o.$$

$$dx^2 + dy^2 - yddy = o \text{ oder} = \infty$$

Die 5. Aufgabe.

192. Den Wendungs-Punct in einer Linie zu finden, da die Semiordinaten mit einander parallel sind.

Auflösung.

Tab. X. Fig. 86. Weil in diesem Falle $ddy = o$, so suchet diesen Werth aus der gegebenen Gleichung für die krumme Linie durch x, und ihr werdet daraus den Werth von AE, das ist, der Abscisse finden, welcher die aus dem Wendungs-Puncte F gezogene Semiordinate EF zugehöret.

Der 1. Zusatz.

193. Es sey $axx = xxy + aay$

$$\frac{ax^2}{x^2 + a^2} = y$$

$$\frac{2a^3 x\,dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = ddy$$

Wenn

Wenn ihr nun dx für unveränderlich annehmet, so ist

$$(2a^3\,dx^2\,(xx+aa)^2 - 8a^3\,x^4\,dx^2 - 8a^5\,x^2\,dx^2) : (x^2+a^2)^4 = ddy = 0$$

und wenn ihr mit $(xx+aa)\,dx^2 : (x^2+a^2)^4$ dividiret

$$2a^3x^2 + 2a^5 - 8a^3x^2 = 0$$

das ist $2a^5 - 6a^3x^2 = 0$

folgends $a^2 - 3x^2 = 0$

und $\sqrt{\frac{1}{3}a^2} = x$

Setzet ihr diesen Werth in die Stelle von x in der Gleichung

so ist $y = axx : (xx+aa)$

$$y = \tfrac{1}{2}a^3 : (\tfrac{1}{3}aa+aa) = \tfrac{1}{3}a^3 : (\tfrac{4}{3}aa)$$
$$= a^3 : 4aa = \tfrac{1}{4}a.$$

Solchergestalt könnet ihr den Wendungs-Punct finden, auch wenn die krumme Linie nicht beschrieben ist.

Der 2. Zusatz.

149. Es sey

$$y - a = (x-a)^{3:5}$$

so ist $dy = \frac{3}{5}(x-a)^{-2:5}\,dx$

$ddy = -\frac{6}{25}(x-a)^{-7:5}\,dx^2 = 0$

Wenn nemlich dx unveränderlich angenommen wird: folgends

$-\frac{6}{25}(x-a)^{-7:5} = 0$

$-6 = 0.$

Weil ihr keinen Werth von x findet, so setzet

$-\frac{6}{25}(x-a)^{-7:5}\,dx^2 = \infty$

das ist $-6dx^2 : 25\sqrt[5]{(x-a)^7} = \infty$

folgends $25\sqrt[5]{(x-a)^7} = 0$

$x-a = 0$

$x = a$

Der 3. Zusatz.

195. In der Parabel ist

$x = y^2$

$x^{1:2} = y$

$\frac{1}{2}x^{-1:2}\,dx = dy$

$$-\frac{1}{4}x^{-3:2}dx^2 = ddy = 0$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{x^3}} = 0$$

$$1 = 0$$

Setzet ferner

$$\frac{-dx^2}{4\sqrt{x^3}} = \infty$$

so ist $\sqrt{x^3} = 0$

Da ihr nun keinen Werth von x findet, ihr möget $ddy = 0$ oder $ddy = \infty$ setzen; so hat die Parabel keinen Wendungs-Punct.

Die 6. Aufgabe.

196. Den Wendungs-Punct in einer krummen Linie zu finden, deren Semi-ordinaten alle aus einem Puncte gezogen werden.

Auflösung.

Weil in diesem Falle $dx^2 + dy^2 - yddy = 0$ (§. 191); so dörffet ihr nur aus der gegebenen Gleichung für die Linie den Werth von dy durch dx exprimiren und ihr werdet wie vorhin den Werth von x in unveränderlichen Grössen finden können.

Zusatz.

197. Es sey in der Conchoide des Nicomedis $BA = a$, $BC = b$, $Cq = z$, $CM = y$, so ist (§. 296. P. I.) Tab. IX. Fig. 79.

$z + a$

$$\frac{z+a=y}{dz=dy}$$

Ferner ist Bq $= V\ (zz-bb)$ und weil bey x und B rechte Winckel sind, die Winckel S und q aber, deren Unterscheid qCS unendlich klein ist, einander gleich seyn, (§. 183. *Geom.*).

$$Bq : BC = St : tq$$
$$V\ (zz-bb)\ b\ dz\ bdz : V\ (zz-bb)$$

und weil die Ausschnitte Cqt und CMr ähnlich sind,

$$Cq : qt = CM : Mr$$
$$z\ bdz\ z+a\ Mr$$
$$\overline{V\ (zz-bb)}$$

demnach ist $Mr = (z+a)bdz : zV\ (zz-bb) = dx$, folgends

$$(z+a)\,bdz = zdx\,V\ (zz-bb)$$

$$\frac{}{dz = dy = zdx\,V\ (zz-bb) : (bz+ab).}$$

Wenn man demnach dx für unveränderlich annimmet, so ist $ddy = (bz+ab)\,V\ (z^2-b^2\ d$ $zdx : (bz+ab)^2 + (bz^3+abz^2)\,dzdx : (bz+a$ $b)^2\,V\ (z^2-b^2) - bzdzdx\,V\ (z^2-b^2) : (bz$ $+ab)^2 = abdzdx\,V\ (z^2-b^2) : (bz+ab)^2 +$ $(bz^3+abz^2)\,dzdx : (bz+ab)^2\,V\ (z^2-b^2) =$ $(2abz^2-ab^3+bz^3)\,dzdx : (ab+bz^2\,V\ (z^2$ $-b^2) =$ (wenn man für dz seinen Werth setzet), $(2abz^3-ab^3z+bz^4)\,dx^2 : (ab+bz)^3$.

Setzet

Setzet nun in der Gleichung $y\,ddy = dx^2 + dy^2$ (§. 191) die gehörigen Werthe an ihre Stelle, so habet ihr

$$(ab+bz) - (2az^3 - ab^2z + z^4)dx^2 : (ab+bz)^3 = dx^2 + (z^4 - b^2z^2)\,dx^2 : (ab+bz)^2$$

$$2az^3 - ab^2z + z^4 = (ab+bz)^2 + z^4 - b^2z^2 = a^2b^2 + 2ab^2z + z^4$$

$$2az^3 - 3ab^2z - a^2b^2 = 0$$

$$z^3 - \tfrac{3}{2}b^2z - \tfrac{1}{2}ab^2 = 0$$ aa

Suchet endlich aus dieser Gleichung die Wurzel (§. 366. 372. P. I.). Wenn ihr diese mit a vermehret, so habet ihr die verlangte Linie CM ($= z + a$), welche den Wendungs-Punct determiniret.

Die 5. Erklärung.

198. Wenn eine krumme Linie BDF mit einem Faden überleget ist, so immer gleichviel gedehnet wird und die gerade Linie BA anfangs die krumme in B berühret, hernach aber immer nach und nach von der krummen abgezogen wird, so beschreibet der äussere Punct A eine andere krumme Linie AHR, und nennet man die krumme Linie BDF die Evolute der Linie AHR, die Theile des Fadens DH, RF &c. aber die RADIOS der Evolute. Tab. X. Fig. 82.

Der

Der 1. Zusatz.

199. Wenn der Punct A in B fället und AB = o, so ist DH oder der Radius der Evolute dem Bogen BD, sonst aber dem Unterscheide zwischen dem Bogen DB und der Linie AB gleich.

+ Ihr Summe Von

Der 2. Zusatz.

Tab. X. Fig. 89.

200. Ihr könnet jeden unendlich kleinen Bogen der Linie AHR als einen Circul-Bogen ansehen, der mit dem Radio DH, oder FR, &c. aus dem Mittel-Puncte D oder F &c. beschrieben worden, und demnach stehen die Radii der Evolute alle auf der Linie AHR perpendicular (§. 48).

Der 3. Zusatz.

201. Weil nur so lange ein Circul-Bogen beschrieben wird, als der Radius der Evolute DH mit einem unendlich kleinen Bogen in der Evolute BDF eine gerade Linie machet; so müssen alle Radii die Evolute BDF berühren (§. 28).

Die 7. Aufgabe.

Tab. X. Fig. 90.

202. Die Länge des Radii der Evolute M C zu finden, wenn die Semiordinaten PM der Linie AMD auf der Axe AB perpendicular stehen.

Auflösung.

Es sey die Semiordinate pm der anderen P M unendlich nahe, ingleichen der Radius Cm dem Radio CM. Ziehet CE mit der Axe AB parallel, bis sie die verlängerte Semiordinate

in

in E erreichet. Weil bey R und E rechte Winckel sind, und RMm = EMC, indem EMG und CMm (§. 200) rechte Winckel seyn, so ist (§. 183. *Geom.*).

$$MR : Mm = ME : MC$$
$$dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = z : z\frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$$

Da nun der Mittelpunct in C ist, daraus der kleine Bogen Mm mit dem Radio CM beschrieben wird, und dieser unverändert bleibet, indem ME um mR zunimmet; so muß die Differential des Radii CM in Ansehung der Differential mR der Linie ME nichts seyn. Nun ist die Differential des Radii CM, wenn ihr dx für unveränderlich (das ist in allen Puncten der Linie von gleicher Grösse) annehmet, $dzdx\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx^2 + zdydydy : dx^2\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = (dzdx^2 + dzdy^2 + zdydydy) : dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

Derowegen habet ihr

$$(dzdx^2 + dzdy^2 + zdydydy) : dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 0$$

$$dzdx^2 + dzdy^2 = -zdydydy$$

$$(dzdx^2 + dzdy^2) : -dydydy = z$$

das ist, weil $dz = dy$

$$(dx^2 + dy^2) : -ddy = z.$$

Wenn ihr nun die Werthe von dy^2 und ddy durch x aus der Gleichung für die krumme Linie exprimiret, so werdet ihr den Werth von z durch x finden.

Der 1. Zusatz.

203. In der Parabel ist

$$ax = y^2$$

daher $adx = 2ydy$

$$adx : 2y = dy$$

$$a^2dx^2 : 4y^2 = dy^2$$

das ist $adx^2 : 4x = dy^2$

Und wenn ihr dx für unveränderlich annehmet

$$-adx^2 : x\sqrt{ax} = ddy$$

Folgends $(dx^2 + dy^2) : -ddy = (4xdx^2 + adx^2)x\sqrt{ax} : axdx^2 = (a+4x)\sqrt{ax} : a = \sqrt{ax} + 4x\sqrt{ax} : a = z = y + 4xy : a = PM + PE$. Es ist $PM = y$ und daher $PE = 4xy : a$.

Tab. X. Fig 90.

Der 2. Zusatz.

204. Es sey für unendliche Parabeln

$$y^m = x$$

so ist $my^{m-1}dy = dx$

Wenn ihr nun dx für unveränderlich annehmet, so ist (m

$(mm-m)y^{m-2}dy^2+my^{m-1}ddy=0$

$(mm-m)y^{m-2}dy^2=-my^{m-1}ddy$

$(m-)y^{-1}dy^2=-ddy$

das ist $(m-1)\,dy^2:y=-ddy$. Demnach ist $(dx^2+dy^2):-ddy=(ydx^2+yd y^2):(m-1)\,dy^2$.

Nun ist $dx^2=m^2y^{2m-2}dy^2$. Derowegen wenn ihr diesen Werth in die Stelle von dx^2 setzet, bekommet ihr

$(m^2y^{2m-1}\,dy^2+ydy^2):(m-1)\,dy^2=z$

$(m^2y^{2m-1}+y):m-1)=z$.

Setzet z. E. $m=2$, so ist $4xVx+Vx=z$.

welche Gleichung mit der vor vorigen übereinkommet, wenn $a=1$.

Anmerckung.

207. Wenn euch das Differentiiren beschwerlich fallen will; so brauchet den Vortheil/dadurch wir oben (§. 24. sqq.) die Regeln zu differentiiren/ zu finden/ angewiesen.

ENDE.

Des vierdten Theiles.

Anhang
zu
Der Algebra
Darinnen
Ihr Nutzen in verschiedenen Wissenschafften durch Exempel gezeiget wird.

Die 1. Erklärung.

1.

Die Geschwindigkeit, mit welcher sich ein Cörper beweget, ist die Verhältnis des Raumes zu der Zeit.

Zusatz.

2. Es sey der Raum $= r$, die Zeit $= t$, die Geschwindigkeit $= c$, so ist die Geschwindigkeit $= r : t$ und $r = ct$.

Die 2. Erklärung.

3. Die Materie eines Cörpers ist diejenige, welche mit ihm wieget und beweget wird.

Zusatz.

4. Daher ist sie seiner Schweere jederzeit proportional.

Die 3. Erklärung.

5. Die Grösse der Bewegung erwächset, wenn die Materie des Cörpers durch

die

die Geschwindigkeit der Bewegung multipliciret wird.

Zusatz.

6. Es sey die Geschwindigkeit des Cörpers $= c$, seine Materie $= m$; so ist die Grösse der Bewegung $= mc$.

Die 1. Aufgabe.

7. Die Lehrsätze zu finden, nach welchen die Bewegungen zweyer Cörper, die sich die gantze Zeit ihrer Bewegung mit einerley Geschwindigkeit bewegen, verglichen werden.

Auflösung.

Es sey der eine Cörper A, seine Geschwindigkeit C, seine Materie M, die Zeit seiner Bewegung T, der Raum, den er durchlauffen R, die Grösse der Bewegung Q. Der andere Cörper a, seine Geschwindigkeit c, seine Materie m, die Zeit seiner Bewegung t, der Raum, den er durchlauffen, r, die Grösse seiner Bewegung q. So ist $C = R : T$ und $c = r : t$ (§. 2). $Q = CM$ und $q = cm$ (§. 6). Solchergestalt habet ihr

I. $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$

II. $Q : q = CM : cm$

Setzet $C = c$, so ist $R : T = r : t$ folgends

III. $R : r = T : t$

Setzet $Q = q$ so ist $CM = cm$. Folgends

IV. $C : c = m : M$

Setzet ferner $T = t$, so ist

V. $R = r$.

Setzet $C = c$. so ist

VI. $M = m$.

Wiederum weil $C : c = (R : T) : (r : t)$ so ist Cc $Tr = ctR$, folgends

VII. $T : t = cR : Cr$.

VIII. $R : r = TC : tc$.

Setzet $T = t$, so ist $Cr = cR$. Folgends

IX. $C : c = R : r$.

Setzet $R = r$, so ist $CT = ct$. Folgends

X. $C : c = t : T$.

Weil $Q : q = CM : cm$, so ist $Qcm = qCM$, folgends

XI. $C : c = Qm : qM$.

XII. $M : m = Qc : qC$.

Setzet $C = c$, so ist $Qm = qm$. Folgends

XIII. $Q : q = C : c$

Endlich weil

$C : = (R : T) : (r : t)$

$Q : q = CM : cm$

so ist $CQ : cq = tRCM : Trcm$

$CQTrcm = cqtRCM$

$QTrm = qtRM$

Cc

Dannenhero ist

XIV. $Q : q = tRM : Trm$

XV.

XV. $T : t = qRM : Qrm$
XVI. $R : r = QTm : qtM$
XVII. $M : m = QTr : qtR$.

Anmerckung.

8. Es ist nicht nöthig zu erinnern / wie die gefundenen Lehrsätze ausgesprochen werden/weil solches denen zur Gnüge bekandt seyn muß/die das vorhergehende verstanden. Aber wohl ist nöthig / daß ich ermahne/ man solle sich diese Lehrsätze wohl bekandt machen / weil man sie in Auflösung anderer Aufgaben gar öfters von nöthen hat. Mercket aber zugleich / wie man so viel Lehrsätze durch die Algebra gleichsam spielende heraus bringen kan / die sonst durch viele Umwege zu erweisen und noch schweerer zu erfinden wären.

Die 2. Aufgabe.

9. Die Gesetze zu finden, nach welchen die schweeren Cörper in einem Raume, da ihnen kein Wiederstand geschiehet, herunter fallen.

Auflösung.

I. Es ist aus der Erfahrung klar, daß, wenn ein schweerer Cörper herunter fället, seine Bewegung um so viel geschwinder wird, je länger er fället. Daraus denn folget, daß die Schweere dem Cörper nach und nach einen neuen Druck geben muß, da die Würckung des ersten noch nicht vergangen, indem kein Wiederstand vorhanden. Da nun in den Höhen, in welchen wir es versuchen können, die Schweere der Cörper einerley gefunden wird; so können wir annehmen, daß die Schweere in jedem Augenblicke einen gleichkräftigen Druck dem Cörper gebe.

Es sey also der Augenblick t, die Geschwindigkeit, welche der Cörper in einem erlanget c; so ist nach Verflieſſung $2t$, die Geschwindigkeit $2c$, nach Verflieſſung $3t$ ist sie $3c$ u. s. w. Nun verhalten sich die Räume, welche die Cörper durchlauffen, wie die Producte aus den Zeiten in die Geschwindigkeiten (§. 2. VII). Daher ist der Raum, durch welchen der Cörper im ersten Augenblicke gefallen, tc; zu Ende des anderen Augenblickes ist sein Raum, den er durchgelauffen $4tc$; zu Ende des dritten $9tc$; zu Ende des vierdten $16tc$; zu Ende des fünften $25tc$ &c. Demnach verhalten sich die Räume gegen einander wie $1tc : 4tc : 9tc : 16tc : 25tc$ &c. das ist, wie $1 : 4 : 9 : 16 : 25$ &c. oder die Quadrate der Zeiten.

II. Ziehet nun die Höhe, durch welche der Cörper im ersten Augenblicke gefallen von der Höhe ab, durch welche er in zweyen gefallen; so bleibet für den anderen Augenblick 3 übrig, eben so findet ihr für den dritten 5, für den vierdten 7, für den fünften 9 &c. Solchergestalt wird die Bewegung der schweeren Cörper nach den ungeraden Zahlen geschwinder gemacht.

III. Da nun $R : r = T^2 : t^2$, so ist $\sqrt{R} : \sqrt{r} = T : t$. Ihr könnet also die Zeiten durch die Wurzeln des Raumes andeuten.

IV. Wenn ihr demnach in einer Parabel die

Abscissen für R annehmet, so sind die Semiordinaten $\sqrt{R}$.

V. Wiederum weil $R : r = C^2 : c^2$; so ist $\sqrt{R} : \sqrt{r} = C : c$. Ihr könnet also die Geschwindigkeit durch die Wurtzeln des Raumes ausdrucken.

VI. Dannenhero wenn die Abscissen in einer Parabel R sind, so sind die Semiordinaten $\sqrt{R}$ und also $= C$.

Zusatz.

10. Wenn in dem Triangel ABI die Abscissen AB, AC &c. $= T$, die Semiordinaten BF, CG &c. $= C$ angenommen werden; so sind die Triangel $= \frac{1}{2}TC = R$. Wenn ihr nun setzet, daß alle Ordinaten BF, CG, DH, EI einander gleich sind: so werden die Triangel Rectangula, deren Inhalt $= TC$. Da nun TC den Raum vorstellet, welchen der Cörper in der Zeit T mit der Geschwindigkeit C durchlauffen würde, die er zu Ende der Zeit hat, wenn er sie gleich anfangs hätte und stets dieselbe unverändert behielte; so ist klar, daß dieser Raum sich zu jenem verhält, wie TC zu $\frac{1}{2}TC$, das ist, wie 1 zu $\frac{1}{2}$, oder wie 2 zu 1. Tab. XI. Fig. 91.

Die 3. Aufgabe.

11. Aus der gegebenen Zeit, in welcher ein Cörper durch eine gewisse Höhe gefallen ist, zu finden, wie er in jedem Theile derselben Zeit gefallen.

Auflösung.

Es sey der erste Theil der Zeit 1, die Zahl der Theile m, der Raum in dem ersten Theile x; so ist der Raum in dem letzten $2mx - 2x + x$ (§. 9. & 69. *Arithm.*) $= 2mx - x$ und die Summe in allen Theilen der Zeit m^2x (§. 113. P. I. *Algebr.*). Setzet nun den ganzen Raum a, so ist

$$m^2x = a$$

$$x = a : m^2,$$

Es sey z. E. $a = 125$, $m = 5$ Secunden, so ist $x = 125 : 25 = 5$. Also ist der Cörper in der ersten Secunde 5, in der anderen 15, in der dritten 25, in der vierdten 35, in der fünften 45. gefallen.

Die 4. Aufgabe.

Tab. XI. Fig. 92. 12. Es wird eine Kugel aus C nach der Linie DC wieder die Wand AB geworffen, man sol den Winckel EDG finden, welchen die Linie ED, nach welcher sie zurücke prallet, mit AB machet. Wir wollen CDF den Einfalls-Winckel, EDG aber den Reflexions-Winckel nennen.

Auflösung.

Lasset aus C und E die Perpendicular-Linien CF und EG fallen. Es sey $CF = a$, $EG = b$, $FG = c$, $DF = x$; so ist $DG = c - x$, $CD^2 = aa + xx$, $DE^2 = bb + cc - 2cx + xx$. Da nun die Natur immer den kürtzesten Weg gehet, so muß die Kugel in D dergestalt zurücke prallen, daß sie bis E den kürtzesten Weg nimmet, welchen

chen sie aus C durch das zurücke prallen von der Fläche AB nehmen kan. Und demnach ist CD + IE die kleineste Grösse von ihrer Art. Bildet euch demnach eine krumme Linie ein, deren Gleichung

$$\sqrt{(aa+xx)}+\sqrt{(bb+cc-2cx+xx)}=y$$

so ist $xdx:\sqrt{(aa+xx)}+(xdx-cdx:\sqrt{(bb+cc-2cx+xx)}=dy=o$ (§. 20 P. II.)

$$x\sqrt{(bb+cc-2x+xx)}+(x-c)\sqrt{(aa+xx)}=o$$

$$x\sqrt{(bb+cc-2cx+xx)}=(c-x)\sqrt{(aa+xx)}$$

das ist FD. ED = DG. CD.

Folgends FD : CD = DG : DE und daher der Reflexions-Winckel EDG dem Einfalls-Winckel CDF gleich (§. 52. 182. *Geom.*).

Zusatz.

13. Hieraus sehet ihr zugleich, daß, wenn ein Strahl des Lichtes CD auf einen Spiegel fället, er dergestalt in E reflectiret wird, daß der Reflexions-Winckel EDG dem Einfalls-Winckel CDF gleich ist.

Die 5. Aufgabe.

14. Aus der gegebenen Weite eines strahlenden Punctes A von dem Mittelpuncte B eines sphärischen Spiegels DEF den Punct zu finden, wo der reflectirte Strahl DC mit der Axe vereiniget wird. Tab. XI. Fig. 93.

Auflösung.

Es sey $AB = a$, $BD = BE = r$, $BC = x$, so

ist

ist $CE = r - x$. Weil das Auge, welches den strahlenden Punct A im Spiegel siehet, in der Axe AE stehet, so muß der Punct D, wovon der Strahl, der in das Auge fället, reflectiret wird, der Axe AE überaus nahe seyn. Und dannenhero ist $DC = CE = r - x$, die Winckel m, n, p und q sind unendlich kleine, und daher ist $DB : AB = m : n$ und $DC : CB = q : p$, folgends auch $DB + AB : AB = m + n : n$. Da nun $q = m + n$ (§. 101. *Geom.*) und $p = n$ (§. 13); so ist $DB + AB : AB = q : p$. Derowegen ist (§. 28 *Arith.*).

$$DB + AB : AB = DC : BC$$

Das ist, $AE : AB = EC : BC$

$$\frac{a + r \quad a \qquad r - x \quad x}{}$$

$$ax + rx = ar - ax$$

$$2ax + rx = ar$$

$$x = ar : (r + 2a)$$

$$r - x = r - ar : (r + 2a) = (r^2 + ar) : (r + 2a).$$

das ist, $EC = AE.BE : (BE + 2AB)$, oder, wenn ihr $AE = r + a = d$ setzet, $= dr : (2d - r)$.

Der 1. Zusatz.

15. Wenn d grösser ist als r, so ist auch $2d : (2d - r)$ grösser als 1 (§. 78. *Arithm.*) und daher $\frac{1}{2}r.2d : (2d - r) = dr : (2d - r)$ grösser als $\frac{1}{2}r$, das ist, wenn der strahlende Punct A vor dem Hohl-Spiegel weiter weg ist als der Semidiameter des Spiegels BE austräget, so ist die

des Bildes EC grösser als der vierdte Theil des Diameters.

Der 2. Zusatz.

16. Wenn d grösser als r, so ist auch $2d-r$ grösser als d, und daher $d:(2d-r)$ weniger als 1 (§. 78. *Arith.*), folgends $dr:(2d-r)$ weniger als r, das ist, die Weite des Bildes von dem Hohl-Spiegel ist geringer als der halbe Diameter.

Der 3. Zusatz.

17. Wenn $d=r$, so ist $dr:(2d-r)=rr:(2r-r)=r$, das ist, wenn der strahlende Punct um den halben Diameter des Spiegels von ihm weg ist, oder in seinem Mittelpuncte stehet, so wird auch sein Bild daselbst gesehen.

Der 4. Zusatz.

18. Wenn $d=\frac{1}{2}r$, so ist $2d=r$ und $rd:(2d-r)=dr:0$, das ist, die Weite des Bildes von dem Hohl-Spiegel wird unendlich groß, weil der Renner in Ansehung des Zehlers zu nichts wird, das ist, die Strahlen werden mit der Axe parallel, denn in diesem Falle können sie niemahls mit ihr zusammen kommen.

Der 5. Zusatz.

19. Wenn d kleiner ist als r und $2d$ grösser als r (oder d grösser als $\frac{1}{2}r$); so ist $2d:(2d-r)$ grösser als 1. Denn setzet $2d=r+m$, so ist $2d-r=m$, und daher $2d:(2d-r)=1+r:m$. Und demnach ist $\frac{1}{2}r.\ 2d:(2d-r)$ grösser als $\frac{1}{2}r$. Derowegen wird das Bild ausser dem Hohl-

Spie-

Spiegel gesehen, wenn die Sache zwischen dem Mittelpuncte und dem Brenn Puncte lieget, der (§. 2) um $\frac{1}{2}r$ vom Spiegel weg ist.

Der 6. Zusatz.

20. Wenn d kleiner ist als $\frac{1}{2}r$, so hat der Renner $2d - r$ das Zeichen —. Denn setzet $2d = r - m$, so ist $2d - r = -m$. Und also hat der gantze Bruch $dr : (2d - r)$ das Zeichen —. Derowegen muß der Ort des Bildes hinter dem Hohl-Spiegel seyn wenn die Sache zwischen dem Brenn-Puncte und dem Spiegel lieget.

Der 7. Zusatz.

21. Wenn d unendlich groß wird, das ist, wenn die Strahlen mit der Axe parallel einfallen, so ist r in Ansehung $2d$ für nichts zu halten, und demnach ist $dr : (2d - r) = dr : 2d = \frac{1}{2}r$.

Der 8. Zusatz.

22. Wenn der Spiegel erhaben ist, so ist $d = a - r$, und daher bekommet ihr an stat $(rr + ar) : (2a + r)$ die Linie $EC = (ar - rr) : (2a - r) = dr : (2d + r)$. Denn weil $2a - 2r = 2d$, so ist $2a - r = 2d + r$. Weil nun hier d allezeit grösser ist als r (denn sonst müste die Sache innerhalb dem Spiegel stehen), und $d : (2d + r)$ weniger als 1; so ist auch $dr : (2d + r)$ weniger als r. Derowegen wird das Bild zwischen dem Mittelpuncte des Spiegels und seiner Fläche gesehen, die Sache mag so weit weg seyn als sie wil.

Der

Der 9. Zusatz.

23. Setzet d unendlich groß, so ist r in Ansehung $2d$ unendlich kleine und dannenhero $dr : (2d + r) = dr : 2d = \frac{1}{2}r$. Derowegen wird das Bild niemahls weiter hinter einem erhabenen Spiegel gesehen, als den vierdten Theil des Diameters, wenn es gleich unendlich weit wegstehet.

Anmerckung.

24. Es ist nicht nöthig zu erinnern / daß / wenn s und r durch Zahlen gegeben werden / auch die Weite des Bildes von der Spiegel-Fläche in Zahlen heraus komme/und ihr auch daher die Verhältnis der Weite zum Diameter des Spiegels finden könnet.

Der 10. Zusatz.

25. Wenn r unendlich groß wird, so ist der Spiegel platt und alsdenn ist $2d$ in Ansehung r unendlich kleine. Derowegen wird in diesem Falle $dr : (2d + r) = dr : r = d$, das ist, in einem platten Spiegel ist das Bild so weit hinter ihm, als die Sache vor ihm.

Der 11. Zusatz.

26. Setzet die Weite des strahlenden Punctes in einem Hohl-Spiegel werde nd, so ist die Weite des Bildes $ndr : (2nd - r)$. Derowegen wenn die Weiten des strahlenden Punctes von dem Hohl-Spiegel sich gegen einander verhalten wie d zu nd, so verhalten sich die Weiten des Bildes von demselben wie $dr : (2d - r)$ zu $ndr : (2nd - r)$, das ist, wie $1 : (2d - r)$ zu $n : (2nd - r)$, oder wie $2nd - r$ zu $2nd - r$.

nr. Wenn nun *n* eine gantze Zahl und *d* grösser als *r* ist; so ist $2nd - rn$ kleiner als $2nd - r$. Derowegen wenn der strahlende Punct auſſer dem Mittelpuncte des Spiegels ist, so gehet das Bild näher zu dem Spiegel, wenn der strahlende Punct weiter davon weggehet. Hingegen wenn *n* eine gebrochene Zahl ist, so ist $2nd - rn$ grösser als $2nd - r$. Derowegen wenn der strahlende Punct von dem Hohl-Spiegel weiter weg ist als der Mittelpunct desselben, so gehet das Bild vom Spiegel weg, wenn der strahlende Punct sich demselben nähert.

Der 12. Zusatz.

27. Wenn *d* kleiner ist als $\frac{1}{2}r$ und *nd* gleichfals kleiner als $\frac{1}{2}r$, so verhalten sich die Weiten des Bildes von dem Spiegel wie $r - 2nd$ zu $rn - 2nd$. Wenn nun *n* eine gantze Zahl ist, so ist $rn - 2nd$ grösser als $r - 2nd$, das ist, wenn der strahlende Punct vom Spiegel weggehet, so gehet auch das Bild davon weg. Hingegen wenn *n* eine gebrochene Zahl ist, so ist $r - 2nd$ grösser als $rn - 2nd$, das ist, wenn der strahlende Punct dem Spiegel näher kommet, so kommet ihm auch das Bild näher.

Der 13. Zusatz.

28. Es werde gleichfals bey einem erhabenen Spiegel die Weite des strahlenden Punctes *nd*, so wird die Weite des Bildes von dem Spiegel *ndr* : $(2nd + r)$, das ist, wenn die Weiten des strahlenden Punctes sich verhalten wie

d zu nd; so verhalten sich die Weiten des Bildes von dem erhabenen Spiegel wie $dr:(2d+r)$ zu $ndr:(2nd+r)$, das ist, wie $1:(2d+r)$ zu $n:(2nd+r)$ oder wie $2nd+r$ zu $2nd+nr$. Wenn nun n eine gantze Zahl ist, so ist $2nd+nr$ r grösser als $2nd+r$. Derowegen wenn der strahlende Punct von dem Spiegel weggehet, so gehet auch das Bild zurücke. Hingegen wenn n eine gebrochene Zahl ist, so ist $2nd+nr$ kleiner als $2nd+r$. Derowegen wenn der strahlende Punct dem Spiegel näher kommet, so kommet ihm auch das Bild näher.

Die 6. Aufgabe.

29. Das Gesetze der Natur zu finden, nach welchem die Strahlen des Lichtes gebrochen werden, wenn sie aus einem durchsichtigen Cörper in einen anderen dichteren fahren.

Auflösung.

Es werde der Strahl AB in B gebrochen und fahre in G. Setzet die Geschwindigkeit, mit welcher sich der ungebrochene Strahl AB beweget, verhalte sich zu der Geschwindigkeit des gebrochenen BG wie n zu m. Derowegen ist die Zeit, in welcher die Linie AB durchlauffen wird, zu der Zeit, in welcher das Licht durch die Linie BG kommet wie n BA zu m BG (§. 7). Lasset nun von A und G die Perpendicular-Linien AD und GC fallen und es sey $AD = a$, $CG = b$, $CD = c$, $CB = x$, so ist $BD = c - x$, folgends $BG = \sqrt{(xx+bb)}$, $AB = \sqrt{(aa+cc-2cx+xx)}$ Tab. XI. Fig. 94.

und $nBA + mGB = nV(aa + cc - 2cx + xx) + mV(xx + bb)$. Weil nun das Licht aus A in G in der geschwindesten Zeit kommen muß, indem die Natur immer den kürtzesten Weg gehet; so ist $nV(aa + cc - 2cx + xx) + mV(xx + bb)$ die kürtzeste Zeit, in welcher das Licht durch die Refraction aus A in G gelangen kan. Bildet euch demnach eine krumme Linie ein, in welcher

$$nV(aa + cc - 2cx + xx) + mV(xx + bb) = y$$

so ist (§. 20. P. II.)

$$n(xdx - cdx) : V(aa + cc - 2cx + x^2) + mxdx : V(x^2 + b^2) = dy = 0$$

$$mx : V(x^2 + b^2) = n(c - x) : V(aa + cc - 2cx + x^2)$$

das ist, $mCB : BG = nDB : AB$

$$mCB \cdot AB = nBD \cdot BG$$

Setzet $BG = AB$, so ist

$$mCB = nBD$$

folgends $m : n = BD : BC$

Wenn ihr nun BG und AB für den Sinum Totum annehmet, so ist BD der Sinus des Winckels BAD oder ABK, hingegen BC der Sinus des Winckels BGC oder GBF (§. 97. *Geom.* & *Trigon.*). Und demnach hat der Sinus des Inclinations-Winckels ABK zu dem Sinu des gebrochenen Winckels FBG beständig einerley Verhältnis.

Die 7. Aufgabe.

Tab. XI. Fig. 95.

30. Den Punct f zu finden, wo die Strahlen

len des Lichtes nach geschehener Refraction in dem Glase KL mit der Axe AF vereiniget werden.

Auflösung.

Setzet der Strahl AD sey dem Strahle A B unendlich nahe, so ist der Winckel A unendlich kleine und die Linie DI, so mit der Axe einen rechten Winckel in I machet, stehet auch auf A D perpendicular. Eben so machet GH so wohl in G als H einen rechten Winckel. Es sey nun $AD = AB = AI = y$, $Bc = a$, $EC = b$, $BE = s$, $DF = IF = BF = x$, $HF = EF = GF = v$, $Hf = Ef = Gf = z$, $cP = r$, $CM = t$, die Verhältnis der Refraction aus der Luft ins Glaß 3 : 2, so ist $Ac = y + a$, $FC = v + b$, $FC = x - a$. Weil nun $3 : 2 = cP : cQ$ (§. 29), so ist $cQ = 2r : 3$. Eben so weil $2 : 3 = CM : CN$ (§. 29), so ist $CN = 3t : 2$. Weil ID mit cP parallel so ist (§. 184. *Geom.*).

$$Ac : cP = AI : ID$$
$$y + a \quad r \quad y \quad ry : (y + a)$$

Eben so, weil wegen der rechten Winckel bey D und Q die Linien ID und cQ parallel sind, ist (§. 184. *Geom.*).

$$FI : ID = Fc : cQ$$
$$x \quad ry : (y + a) \quad x - a \quad \tfrac{2}{3}r$$

$$\tfrac{2}{3}rx = (rxy - ary) : (y + a)$$

$$2rxy + 2arx = 3rxy - ary$$

$$3ary = rxy - 2arx$$

$$3ay : (y - 2a) = x$$

Wiederum weil wegen der rechten Winckel bey M und H die Linien CM und GH parallel sind, so ist (§. 184. Geom.).

$$FC : CM = FG : GH$$
$$b+v \quad t \quad v \quad tv : (b+v)$$

Und endlich weil wegen der rechten Winckel bey N und H die Linien CN und GH parallel sind, so ist (§. 184. *Geom.*).

$$fC : CN = fG : GH$$
$$b+z \quad \tfrac{3}{2}t \quad z \quad tv : (b+v)$$

$$\tfrac{3}{2}tz = (btv + tvz) : (b+v)$$

$$3btz + 3tvz = 2btv + 2tvz$$

$$3bz = 2bv - vz$$

$$3bz : (2b - z) = v = x - f$$

$$f + 3bz : (2b - z) = x = 3ay : (y - 2a)$$

$$2bfy - fzy + 2afz - 4abf + 3bzy - 6abz = 6a$$
$$by - 3azy$$

$$3azy + 3bzy + 2afz - fzy - 6abz = 6aby + 4ab$$
$$f - (2bfy$$

$$z =$$

$$z = \frac{6aby + 4abf - 2bfy}{3ay + 3by + 2af - fy - 6ab} = Ef$$

Wenn ihr die Dicke des Glases nicht regardiret, und also $f = o$ setzet, so verliehren sich alle Glieder, die durch f multipliciret sind, und ihr bekommet

$$Ef = z = 6aby : (3ay + 3by - 6ab) = 2aby : (ay + by - 2ab).$$

Anmerckung.

31. Unerachtet die gefundene Regel hauptächlich dienet/ den Ort des Bildes zu finden/ wenn das Glaß auf beyden Seiten erhaben ist und zwar die Radii der erhabenen Flächen nicht von einerley Grösse sind; so könnet ihr doch daraus gar leichte auch Regeln für alle übrige Fälle herleiten/ wie aus folgenden Zusätzen erhellet.

Der 1. Zusatz.

32. Wenn das Glaß auf beyden Seiten gleich erhaben ist, so ist $cB = CE$, das ist, $a = b$ u. daher $z = 2a^2y : (2ay - 2a^2) = ay : (y - a)$.

Der 2. Zusatz.

33. Wenn cB oder d unendlich groß wird, so ist die Seite KBL, die gegen den strahlenden Punct A gekehret ist, platt, und die Glieder, die durch a nicht multipliciret sind, werden in Ansehung der anderen unendlich kleine oder nichts. Daher ist $z = 2aby : (ay - 2ab) = 2by : (y - 2b)$.

Der 3. Zusatz.

34. Hingegen wenn b unendlich groß wird, so ist das Glaß auf der hinteren Seite KEL platt und die Glieder, darinnen b nicht vorhanden, werden in Ansehung der anderen unend-

lich kleine. Solchergestalt ist $z = 2aby : (by - 2ab) = 2ay : (y - 2a)$.

Der 4. Zusatz.

35. Also ist es ein Thun, ob ihr die erhabene oder platte Fläche eines Glases, so auf einer Seite erhaben, auf der anderen platt ist, gegen den strahlenden Punct kehret.

Der 5. Zusatz.

36. Wenn sowol a als b unendlich groß werden, so wird das Glaß auf beyden Seiten platt und $ay + by$ werden in Ansehung $2ab$ unendlich kleine. Daher ist $z = 2aby : -2ab = -y$. Also kommen die Strahlen nirgends zusammen, als in dem Puncte, wo sie ausfliessen.

Der 6. Zusatz.

37. Wenn y unendlich groß wird, so fallen die Strahlen mit der Axe parallel ein, und daher ist $2ab$ in Ansehung der übrigen Glieder unendlich kleine, folgends $z = 2aby : (ay + by) = 2ab : (a + b)$ für ein Glaß, welches auf beyden Seiten auf verschiedene Art erhaben ist.

Der 7. Zusatz.

38. Wenn das Glaß beyderseits auf gleiche Art erhaben ist, so ist $z = 2aa : 2a = a$.

Der 8. Zusatz.

39. Wenn a unendlich groß wird, so ist die Seite KBL gegen den strahlenden Punct zu platt, und b in Ansehung a unendlich kleine. Derowegen ist $z = 2ab : a = 2b$. Hingegen wenn

wenn b unendlich groß wird, so ist die vom strahlenden Puncte A weggekehrete Seite KE L platt, und a in Ansehung b undendlich kleine. Derowegen ist $z = 2ab : b = 2a$.

Der 9. Zusatz.

40. Wenn ihr für $+b$ in der Regel $-b$ setzet, so wird das Glaß auf der Seiten KBL gegen den strahlenden Punct A zu hohl, und $z = -2aby : (ay - by + 2ab)$.

Der 10. Zusatz.

41. Setzet $-a$ für $+a$, so wird das Glaß auf der vom strahlenden Puncte weggekehrten Seite hohl und $z = -2aby : (by + 2ab - ay)$.

Der 11. Zusatz.

42. Wenn ihr für a und b zugleich $-a$ und $-b$ setzet, so wird das Glaß auf beyden Seiten hohl, und $z = 2aby : (-ay - by - 2ab)$.

Der 12. Zusatz.

43. Wenn a unendlich groß wird und ihr $-b$ für b setzet, so ist das Glaß auf der Seite gegen den strahlenden Punct platt, auf der anderen aber hohl, und die Grössen, so durch a nicht multipliciret sind, werden in Ansehung der anderen unendlich kleine. Daher ist $z = -2by : (y + 2b)$.

Der 13. Zusatz.

44. Wenn b unendlich groß wird und ihr $-a$ für a setzet, so ist das Glaß auf der Seite gegen den strahlenden Punct zu hohl, auf der anderen

ben, und die Grössen, so durch b nicht multipliciret sind, werden in Ansehung der anderen unendlich kleine. Daher ist $z = -2ay : (y+2a)$.

Der 14. Zusatz.

45. Wenn y unendlich groß wird, so fallen die Strahlen parallel ein und daher wird (§. 40) $z = -2aby : (ay - by) = -2ab : (a-b)$, (§. 41) $z = -2aby : (-ay+by) = -2ab : (b-a) = (\text{wenn } a = b) -2a^2$, (§. 42) $z = 2aby : (-ay-by) = 2ab : -(a-b) = (\text{wenn } a = b) -a$, (§. 43) $z = -2by : y = -2b$, (§. 44) $z = -2ay : y = -2a$.

Der 15. Zusatz.

46. Weil in den Hohl-Gläsern die Weite des Punctes, wo die gebrochene Strahlen mit der Axe vereiniget werden, das Zeichen — hat, so ist klar, daß derselbe auf der Seite gegen den strahlenden Punct zu gesucht werden muß und dannenhero die Strahlen in dergleichen Gläsern von der Axe weggebrochen werden. Ob aber solches viel oder wenig geschehe, kan aus den gefundenen Regeln geurtheilet werden.

Anmerckung.

47. Aus diesen Exempeln könnet ihr sehen/ wie die Algebra mit grossem Vortheile in anderen Wissenschafften angebracht wird/ und werde ich bey anderer Gelegenheit noch ein mehreres zeigen.

ENDE der Algebra.

Regi-

Register.

über alle vier Theile.

NB. Die Römische Zahl bedeutet den Theil / die dabey gesetzte Ziffern aber die Seiten. Wenn im Anfange keine Römische Zahl stehet / so ist der erste Theil zu verstehen; sonst aber derjenige / welcher vorhergehet.

A B, III. 1437. 1439
Aban mah, III. 1435
Abdachung, II. 575
Abend. Erklärung, III. 1091. wie er zu finden, 1095. 1096
Abend-Demmerung, III. 1167. Ursachen, 1169. 1168. wie lange sie wehret, 1169. wie das Ende auszurechnen, 1169. 1170
Abends-Stern, III. 1221

Abend-Uhren. Erklärung, III. 1475
Zeichnung 1483
Abgekürzte Pyramide. Wie sie perspectivisch zu zeichnen, III. 1027
Abgekürzter Kegel. Wie sein Inhalt zu finden 225
Abgesonderte Theile. III. 1046
Ablauff. Erklärung, 324. Zeichnung, 330. Gebrauch, 330 328
Abscisse. IV. 1624
Abschnitt des Circuls. Wie er auszurechnen 281
Abweichende Uhr. Erklärung III. 1475
Zeichnung, 1484. & seqq.
Acht-Ecke. Wie seine Seite zu finden, IV. 1595
Adytes Carthaune, II. 502
Adar, III. 1437. 1439
Adar mah, III. 1435
Addiren. Erklärung, 41. Regeln für ganze Zahlen, 42. 49. für gebrochene, 78 für Buchstaben, IV. 1502. 1503. für Irrational-Zahlen, 1515. Probe, I. 51. 52. Zeichen, 52. IV. 1499
Adeler, III. 1146
Adspecte. Erklärung, III. 1342. Zeichen und Bedeutung, 1343 1344
Aehnlichkeit, 114. der Circul 116. Figuren, 125. 185
Æquatio centri. Erklärung, III. 1267
wie sie zu finden, 1274
Æquation der Uhr, III. 1418
Æquatio optica, III. 1267
physica, ibid.
Æquator, III. 1087. 1381
Æquinoctial-Uhr. Erklä-

Klärung, III. 1474
wie sie zu zeichnen, 1476
Æquinoctium. Wie es zu observiren, III. 1255
Æquatoris Grade. Wie sie in Zeit zu verwandeln, III. 1120 1121
Aera, III. 1441
Aerometrie, III. 837 841
Aesterich. Wie es zu schlagen, 437
Aggregat, 41
Aiyar, III. 1437
Alcor, III. 1147
Algebra, 1495
Algebraische Aufgaben in Zahlen, IV. 1519. im menschlichen Leben, 1527. in der gemeinen Geometrie, 1593. in der höheren, 1623
Algebraische Gleichung. Nutzen in Erklärung der krummen Linien, IV. 1623
Algebraische Linie. Erklärung. IV. 1624
Geschlechte, 1625
allgemeine Gleichung, 1627. Subtangens, 1759
Altar, III. 1146
Alternatio rationum. IV. 1580
Altitudo nonagesimi, III. 1174
Americanische Gans, III. 1147
Amplitudo occidua. Erklärung, III. 1126 wie sie zu finden, 1127. Nutzen, 1128
Amplitudo ortiva. Erklärung, III. 1126 Wie sie zu finden, 1127. 1128. Nutzen, 1128
Amphora, III. 1100
Andreas, III. 1147
Andromeda, III. 1146
Ancker in Mauern, 409
Angle de l' epaule, II. 584
diminué, ib.

Angle du centre, ibid.
Angulus acutus, 118
ad Solem, III. 1266
obtusus, 118
orientis, III. 1173
rectus. 118
Anlage der Böschung, II. 575
Anlauff. Erklärung, 324. Zeichnung, 327
Anliegende Theile, III. 1046
Anmerckungen. 29
Anomalia coæquata, III. 1266
orbis, III. 1296
Antarctische Polar-Circul III. 1103
Antares, III. 1147
Antichthones, III. 1381
Antipodes, III. 1381
Antinous, III. 1146
Aphelium, III. 1264. Wie es zu finden, 1268. 1269. seine Bewegung, 1269
Apogæum, III. 1264
Wie es zu finden, 1283
Apollonische Parabel, IV. 1629
Approchen. Erklärung, II. 691. Beschaffenheit, 691. Wie sie zu führen, 693 zu hindern, 696
April, III. 1432
Apsidum linea, III. 1264
Arabisches Jahr, III. 1438
Aræostylon, 372
Arcade, 370
Architrab. Erklärung, 322. wesentliche Glieder, 331. Höhe 340. Auslauffung, 340
Arcitenens, III. 1100
Arctische Polar-Circul III. 1102
Arcturus, III. 1147
Arcus inter centra, III. 1351
Arcus visionis, III. 1164
Ardabahesht mah, III. 1435
Argonavis, III. 1146

Argus

Argument der Inclination, III. 1289
Aries, III. 1100
Arithmetica infinitorum, IV. 1590
Arithmetische Progression, IV. 1558
Proportional-Zahlen Wie sie zu finden, 96
Verhältnis, 72
Artillerie. Erklärung, II. 483. 487. Nutzen 485. 486. wie sie abzuhandeln, 483
Art zu zehlen, 46
Ascensional Differentz. Erklärung, III. 1119
wie sie zu observiren, 1119
Ascensio obliqua, III. 1118
recta, III. 1117
Asini, III. 1147
Astrolabium, 117
Astronomie. Erklärung, III. 1083. Nutzen, 1082. 1082
Astronomisches Fernglaß, III. 996
Astronomische Stunden, III. 1419
Asymptoten. Erklärung, IV. 1650. Wie sie zu finden, 1783
Athyr, III. 1433
Attaqven, II. 685
Attisches Jahr, III. 1437
Aufgabe, 27. Wie sie algebraisch aufzulösen, 1517. 1519
Aufgang der Sonne. Wie er zu finden, III. 1126
der Sterne, III. 1090 1156
Auge. Woraus es bestehet, III. 915. 916. Veränderungen, die bey dem Sehen darinnen vorgehen, 917. Beschaffenheit, wenn es in die Ferne und in die Nähe siehet, 920
Aufgemachte Thüre. Wie sie ins Perspectiv zu bringen, III. 1031

Au-

Augen-Gläser, III. 992
Augen-Punct, III. 1023
Augustmonat, III. 1432
Augustus, III. 1432
Aufhebung eines Bruches, 77
Aufriß. Erklärung. 479
Wie er zu machen, 479. 480
Ausladung, 321
Aussage, 22
Ausschnitt des Circuls, 178
Ausdehnen, II. 843
Aussenwercke. Wozu sie dienen, II. 596 ihre Arten, 597 ihre Beschaffenheit, 601. 602. Profil, 645
Aussere Polygon, II. 582
Ausziehung der Wurzeln. Erklärung, 82 Regeln, 85. 90. Probe, 87. 92
Axe der Laffeten. Wie sie zu zeichnen, II. 518
Axiomata, 17
Axis mundi, III. 1087
Axis in peritrochio. Erklärung, II. 713 Eigenschafften, 742
Azimuth. Erklärung, III. 1126. Wie es zu finden, 1127. 1128
Azimuthal-Quadrant, III. 1126

Babylonische Stunden, III. 1420
Backsteine, 306
Bär der kleine und grosse, III. 1146
Bäurisch werck, 430 431
Bahn der Planeten, III. 1239. Was sie vor eine Linie ist, 1262
Balcon, 423
Band, 324
Banquet, II. 574
Barometrum, II. 857
Baroscopium, ibid.
Bastard-Fenster, 412
Bastey, II. 579
Bastion, ibid.
Bathseba, III. 1747

Batterie. Erklärung, II. 697. Zeichnung, 697
Bau-Art der Alten, 318
Bauholz. Wie es beschaffen seyn sol, 301 wie es zu fällen, 301 302. zu trocknen, 303 im Bauen zu setzen, 304
Bau-Kunst, 289
Baumeister, 289
Bau-Unkosten. Wie sie im Festungs-Baue zu rechnen, II. 677
Bauzeug, 298.299
Bedeckung der Fern-Gläser. Erklärung, III. 1006. Nutzen, 1007. wie sie zu finden, 1007
Bedingung, 22.23
Behemian mab, *III.* 1435
Begriff, 6.8
Benennung, IV. 1517
Bequemlichkeit des Gebäudes, 290
Berge im Mond. III. 1209. 1210. ihr Schatten, 1211. ihre Grösse, 1332 in der *Venere*, *III.* 1221
Berme. Erklärung, II. 592. Nutzen, 593
Beständige Defens-Linie. Erklärung, II. 582. Grösse, II. 585.586
Bewegliche Feste, III. 1457
Bewegung. Regeln insgemein, IV. 1861 ins besondere für die schweeren Cörper, 1863. 1865. wie sie gesehen wird, III. 918. 942. 943 944
Bewegung des Mondes, III. 1097. 1303 der Planeten, III. 1237 der Sterne, wie vielerley sie ist, III. 1099

Bewegungs-Kunst, II. 709
Beweiß, 24. 27
Bey einander, wenn wenn die Sachen gesehen werden, III. 940. 941
Bild im Auge, wie es beschaffen, III. 917
Binomische Wurtzel, IV. 1532
Biquadratische Gleichung. Wie sie Geometrisch zu construiren, IV. 1715. 1716
Blätter, wozu sie in der Bau-Kunst gebraucht werden, 334
Blondells Fortification. Maximen, II. 628. Ausrechnung der Linien und Winckel, 630. Zeichnung, 635. Profil, 637
Bodenstücke, II. 511. 512
Bock in der Artillerie, II. 519
Böschung, II. 575
Bogen, wie er auszurechnen, 281. wie daraus der Sinus zu finden, IV. 1821. 1823. wie der Tangens zu finden, 1817
Bogen in Arcaden Wie er beschaffen, 375. 377
Bogen-Schuß, II. 50
Bogenstellung. Erklärung, 370. Zeichnung, 383. Einrichtung, 388
Bogen zwischen den Mittelpuncten, III. 1351
Böller, II. 532
Bollwercke. Erklärung, II. 579. Figur, 579. 580
Bollwercks-Winckel. Erklärung, II. 583. Grösse 586
Bolzen, II. 518

Bombe, II. 537. 538 539
Bootes, III. 1146
Bouſſole, 205. 208
Borten, 322
Brachmonat, III. 1432
Brandröhre in der Bombe, II. 537
Carcaſſe, II. 543
Brand-Maure, 407
Breite des Fluſſes, wie ſie zu meſſen, 139
des Monds, wie ſie zu finden, III. 1319
der Planeten, wie ſie obſerviret wird, III. 1237 1239. wie ſie zu finden, 1296 1297
des Sternes. Erklärung, III. 1140. wie ſie zu finden, 1141
ob ſie veränderlich, 1151
eines Ortes. Erklärung, III. 1388. wie ſie zu finden, 1389
Brenn-Glaß, III. 979 980. 981
Brenn-Punct. Erklärung, IV. 1631
wie er zu finden in der Parabel, 1631
in der Ellipſi, 1631
in der Hyperbel, 1645
1646. in den Brenn-Gläſern, III. 979. 980 981
Brenn-Spiegel, III. 966. 967. 968
Brill. Zeichnuug, II. 637. 645. 646. Profil, 646
Bruch. Erklärung, 76
wie er geſchrieben wird, 76. ſein Werth, 76. Veränderungen, 77. Rechnung, 78
Logarithmus, 256 257. wie unendliche zu ſummiren, IV. 1588. wie ſie aus Gleichungen wegzuſchaffen, IV. 674
Bruſtfelgen, II. 749

Bruſtlehne, 427.428
Bruſtwehr, II. 574
575
Büchſenmeiſterey-Kunſt, II. 487
Buchſtabe-Rechen-kunſt, IV. 1496

CAlendæ, III. 1432
Calender, wie er zu machen, III. 1461
1462
Caliber, II. 504
Caliber-Stab. Erklärung, II. 504. Zubereitung, 507
Camera obſcura, III. 921
Camin, wie er zu bauen, 453
Cancer, III. 1100
Canonen-Schwefel, II. 490
Canun, III. 1437
Capella cum hædis, III. 1147
Caper, III. 1100
Capitäl. Erklärung, 322. weſentliche Glieder, 331. Höhe, 339. Auslaufung, 339
Capital-Linie, II. 583
Caponieres, II. 604
Carcaſſen, II. 543
Cardinal-Gegenden, III. 1402
Carthaune, II. 501. 502
521
Casleu, III. 1439
Caſſiopejæ, III. 1146
Caſtelle, II. 663
Caſtor, III. 1147
Catalogi fixarum, III. 1145. 1146
Catoptrick, III. 949
Centaurus, III. 1146
Centri-Winckel, II. 584
Centrum, 116
gravitatis, II. 717
magnitudinis, II. 717
Cepheus, III. 1146
Chaldäiſcher Scrupel, III. 1426
Chamæleon, III. 1146
Characteres Chronologici, III. 1441

Che-

Chemin Couvert, II. 121
Chojac, III. 143
Chorda, 117
Chordad mah, III. 1435
Christ Monath, III. 1432
Chronologie, III. 1417
Circul. Erklärung, 116. Eigenschafft, 116. 173. 175. IV. 1618. 1776. 1777. Eintheilung, 117 Ausrechnung, 173 175. Beschreibung, 156. Quadratur, IV. 1799. Rectification, 1816. Subtangens, 1736. wie er ins Perspectiv zu bringen, III. 1025
Circul der Länge und Breite, III. 1140
Circul von höheren Geschlechtern, IV. 1644 1757
Circul-Bogen, 124 153
Circuli diurni, III. 1091
Circumvallations-Linien, II. 688
Cissois. Erklärung, IV. 1660. Eigenschafft und Gleichung, 1651
Citadellen. Erklärung, II. 651. Beschaffenheit, 652. 654 Zeichnung, 654
Citationes, 25
Climata, III. 1398 1400
Coæquirte Anomalie. Erklärung, III. 1266 wie sie zu finden, III. 1273. 1275
Cörper. Wie er perspectivisch zu zeichnen, III. 1026
Cörper von leichterer Art, II. 807 von schwererer Art, II. 808
Cörperlicher Inhalt, wie er zu finden, 215
Ort, IV. 1702
Colonnate. Erklärung, 370. Beschaffenheit, 373. 375

Cometen, was man von ihnen observiret, III. 1338. ihre Natur, 1341. ihr Ort, 1340. und Schweiff, 1341
Commutations - Winckel, III 1294
Compositio rationum, *IV*. 1579
Conchilis, *IV*. 1659
Conchois. Erklärung, IV. 1659. Gleichung, 1659. 1660
Asymptote, 1659
Subtangens, 1769
Wendungs-Punct, 1853
Conus. Erklärung, 122 Eigenschafften, 122 II. 810. IV. 1621 1784. Ausrechnung, IV. 1808. 1824
Conischer-Spiegel. Erklärung, III. 949 wie sie zu machen, 957. Eigenschafften, 960. 961
Conjunction, *III*, 1342
Contra-Minen, II. 605
Contravallations-Linien, II. 688. 689
Contreguarde. Erklärung, II. 598. Zeichnung, 627. Nutzen, 599
Contrescarpe. Erklärung, II. 602. wie sie zu erobern, 700 701
Conversio rationum, *IV*. 1580
Corinthische Ordnung. Erklärung, 337 Glieder, 355
Cornea, *III*. 915
Corollaria, 28
Cortine, II. 581
Cosinus, 250
Crater, *III*. 1146
Crepusculum matutinum, *III*. 1166 *vespertinum*, *III*. 1167
Creutzgewölbe, 444 445
Cubatur, *IV*. 1824

Cubic-Maaß, 216
Cubic-Ruthe, Schuh, Zoll, Linie, 216
Cubic-wurtzel. Erklärung, 82. 83. wie sie auszuziehen, 90 IV. 1539. ihr Logarithmus, 258
Cubic-Zahlen. Ihre Differentien, IV. 1552. 1553. ihr Logarithmus, 258
Cubiren, IV. 1824
Cubische Gleichung, wie daraus die Wurtzel zu ziehen, IV. 1081. wie sie Geometrisch zu construiren, 1715
Cubus. Erklärung, 121. Eigenschafften, 122 wie sein Inhalt auszurechnen, 215
Curtirte Weite. Erklärung, III. 1289 wie sie zu finden, 1293
Curtirung, III. 1290
Crystalline Feuchtigkeit, III. 916
Cyclois. Erklärung, IV. 1663. Eigenschafften, 1663. Subtangens, 1771
Cyclus indictionum, III. 1451
Lunæ, III. 1446
Solis, III. 1443
Cylinder. Erklärung, 121. Eigenschafft, 121. 216. II. 809 IV. 1618. Ausrechnung, 220. 233. 234 Netze, 244
Cylindrische Spiegel. Erklärung, III. 949 wie sie zu machen, 957. Eigenschafften, 959

Dach. Erklärung, 393. Höhe, 469 Arten, 470. 471 Materie, 471
Dach *à la manſarde*, 470
Dampff-Kugel. Erklärung, II. 544 wie sie zu machen, 548

Dauerhafftigkeit des Bauzeuges. Wie sie zu beurtheilen, 299
des Gebäudes, wie sie zu beurtheilen, 292
David, III. 1147
December, III. 1432
Declination eines Sternes. Erklärung, III. 1110. wie sie zu finden, 1110. ihr Nutzen, 1111
der Ecliptick, III. 1112. 1114
Declinirende Uhren, III. 1475
Decke, 440. 441
Deckel, 372
Defendirende Linie, II. 568
Defension, wie sie einzurichten, II. 567
Defens-Linie, II. 568
Definitio, 3
nominalis & realis, 6
les Debors, II. 596
Delphin, III. 1146
Delphine in der Artillerie, II. 511
Demonstrationes, 27
Demigorge, II. 582
Demilune, II. 598
Descensional-Differenz, III. 1119
Deutlich, wenn Sachen gesehen werden, III. 919
Deutlicher Begriff, 7
Diabetes, II. 893
Diagonal, 164
Diameter. Erklärung, 116. Verhältnis zur Peripherie des Circuls, 174. 175. 282
Diameter der Planeten. Wie er zu finden, III. 1326. 1327
einer krummen Linie, IV. 1623
der Erde, wie er zu messen, III. 1383. 1384
Diastylon, 372
Dickſäulig, 372
Dielen, 434. 435

Dif-

Differentiæ aſcenſionales, III. 1120
Differential-Grösse, IV. 1747. wie ſie zu differentiiren, 1748
Differential-Rechnung, IV. 1745
Differentiiren. Erklärung, IV. 1748 Regeln für die veränderlichen Grössen, 1748. für die Exponential-Grössen, 1840. für die Differential-Grössen, 1846
Differentio-differentiiren, IV. 1846
Differenz, 42
Dignität. Erklärung, IV. 1509. Eigenſchafften, 1544. 1557. 1558. allgemeine Regel für dieſelben, 1548
Dimab, III. 1435
Dioptrick, III. 974
Directions-Linie, II. 716
der ſchweeren Cörper, II. 722. 723
Directus, III. 1238
Diſtanz-Punct, III. 1023
Dividendus, 44
Dividiren. Erklärung, 43. 44. Regeln für gantze Zahlen, 65. 66. für gebrochene, 81. für Buchſtaben, IV. 1508 für Irrational-Zahlen, 1517. wie es ohne das einmahl eines geſchiehet, I. 69 Zeichen, 72. IV. 1501
Diviſio rationum, IV. 1580
Diviſor, 44
Dodecaëdrum. Erklärung, 241. Netze, 241. 242
Doppelt wenn etwas geſehen wird, III. 947
Doppelte Eckenzierde, 422
Hohlkehle, 327

Dorado, *III.* 1147.
Dorische Ordnung. Erklärung, 337. Glieder, 345.
Drache, III. 146.
Drachen-Kopff, III. 1303.
Drachen-Monath, III. 103.
Drachen-Schwantz, III. 1303.
Dreyecke. Erklärung, 118. Eigenschaften, 123. wie seine Höhe zu finden, IV. 1604. 1605.
Dreyvierthel-Carthaune, II. 502. 521. 530.
Droßirung, II. 575.
Druck der flüßigen Cörper, II. 813.
Druckwerck, II. 882.
Dulheggia, *III.* 1439.
Dulkaadah, *III.* 1439.
Dunckel. Warum ein Cörper aussiehet, *III.* 937.
Dunckeler Begriff, 7.
Durchmesser, 116.
Durchschnitt des Gebäudes, 480.
einer Festung, III. 621.

Ebener Ort, IV. 1702.
Excentricität. Erklärung, III. 1264. Wie sie zu finden, 1267. 1283. ihre Grösse, 1197.
Excentrische Anomalie, III. 1266.
Excentrischer Circul, III. 1266.
Ort des Planetens, III. 1294.
Eckenzierde. Wie sie zu zeichnen, 421. 422.
Ecliptick. Erklärung, III. 1099, 1381. Eintheilung, 1100. gröste Declination, 1112.
Egyptisches Jahr, III. 1433.
Eigene Bewegung, III. 1099.

Einfache Eckenzierde, 421
Einfacher Ort, IV. 1702
Einfallendes Licht, 413
Einfalls-Winckel, III. 913
Ein mahl eins, 57. 58. 60. III. 1148
Eintheilung des Gebäudes. Wie sie zu finden, 449
Einziehung, 406
Einziehung der Mauern, 406
Elastische Krafft der Lufft, II. 846. 849. IV. 1789
Elephant, III. 1148
Ellipsis. Erklärung, IV. 1635. 1636. Eigenschafften, 1636. 1776. 1777. 1780. 1802. 1803. 1804. Gleichung, 1636. 1641. Beschreibung, 1643. Quadratur, 1802. 1803. Subtangens, 1758. wie sie aus dem Kegel geschnitten wird, 1657. ist die Bahn der Planeten, III. 1262.
Ellipses von höheren Geschlechten, IV. 1643. 1644. 1758.
Elliptische Affter-Kugel, IV. 1827.
Elongations-Winckel, III. 1294.
Elul, III. 1437. 1439.
Entgegensetzung, III. 1342.
Entfernung vom Ruhe-Punct, II. 716.
Erde. Ihre Figur, 1370. 1371. Grösse, 1383. 1384. Bewegung, 1248. ist ein Punct in Ansehung der Welt-Kugel, 1105. wie groß sie im Mond gesehen wird, 1334. wie sie daselbst aussiehet, 1335. ihr ab- und zunehmendes Licht, 1334. 1335. wie starck

sie den Mond erleuchtet, 1328
Erdfinsterniß, III. 1211.
Erd-Kugel, wie sie zu verfertigen, III. 1404. ihr Gebrauch, 1407
Erdreich. Wie seine Beschaffenheit zu erforschen, 395. wie das lockere zu befestigen, 396
Erfahrungen. Was sie sind, 18. Ihre Beschaffenheit, 18. 19. Wenn man sie anführen muß, 20 21
Erhabener Spiegel. Erklärung, III. 949 wie er zu machen, 956. Eigenschafften, IV. 1878
Erhabenes Glaß. Erklärung, III. 976 Eigenschafft, 978 981. 984. 988
Eridanus, *III.* 1146
Erkäntnis der Natur. Wie sie beschaffen, III. 1248
Erklärung, 5. 6. wie sie bey den Mathematicis beschaffen, 8 der Wörter, 6. 8 9. 10. 11. 12 der Sachen, 6. 12 13
Erleuchtung der Kugel, III. 925
Epacta. Erklärung, III. 1448. Wie sie zu finden, 1450. 1451
Epocha. *III* 1441
Epiphi, *III.* 1433
Equuleus, *III.* 1146
Esphandarmod mah, III. 1435
Esplanade, *II.* 602
Europäische Stunden, III. 1420
Eurythmie. Erklärung, 297. Grund, 297. 298 Gebrauch, 297
Eustylon, 372
Evolute, IV. 1855
Exponens rationis, 72

Exponential = Grösse. Erklärung, IV. 1840. wie sie zu differentiiren, 1840 wie sie zu integriren, 1844
Exponential = Linien, IV. 1841
Exponential = Rechnung, IV. 1840

Faces. Erklärung, II. 580. Grösse, 591
Fackeln der Sonne, III. 1192. 1193
Factores, 43
Factum, 43
Fässer, wie sie zu visiren. 236
Falckaune, II. 502. 521.
Falsche Wage. Wie sie zu erkennen, II. 729 zu gebrauchen, 730 zu bessern, 732
Familie der algebraischen Linien, IV. 1626
Farben. Wie sie entstehen, III. 933 des Monds in Finsternissen, III. 1204. 1205
Farbigte Haut, III. 916
Faschinen, II. 702. 703
Februarius. III. 1432
Feder. Wie dadurch Machinen zu bewegen, II. 796. 797
Felder-Decke von Holtze, 441 von Gypse, 443
Feldmessen, 200
Feldschantzen. Erklärung, II. 665. Grundrisse, 666. 667. 668 669. 670. Profil, 665
Fenster. Erklärung, 409. Beschaffenheit, 409. 410. Höhe und Breite, 411. 412. 414 415. wie sie übereinander zu setzen, 415. zu bauen, 416 427. zu zieren, 416 ins Perspectiv zu bringen, III. 1030 wie viel in ein jedes

Gemach gehören, I. 447.448
Fenster-Creutze, 410
Fernglaß. Erklärung, III. 991. Erfinder, 991. Röhren dazu, 992.993. Gestelle, 1000. 1001. wie viel es vergrössert, 1004 warum die grossen mehr vergrössern, 1006
Fernglaß in der Astronomie, III. 996 auf der Erden, III. 1001. 1002 1003
Fervardin, mah, *III.* 1435
Feste, III. 1457
Fester Cörper. Erklärung, II. 807. wie viel er sich eintauchet, 830
Festigkeit des Gebäudes. Erklärung, 290. wie sie zu beurtheilen, 292. wie sie zu beobachten, 315 316
Festung. Wie ihre Vollkommenheit zu beurtheilen, II. 563 wie sie abzustecken, 678.
Feuer-Ballen, II. 544.
Feuer-Kugeln. Erklärung, II. 544. Arten, 545. wie sie zu binden, 546. und zu tauffen, 546.
Feuer-Kugel-Zeug, II. 543.
Feuer. Wie dadurch Machinen zu bewegen, II. 797.798
Feuer-Maure. Erklärung, 473. wie sie nicht rauchet, 473
Feuerwercker-Kunst, II. 487
Figuren. Eigenschafften, 125. Aehnlichkeit, 185. Grundlegung, 200. Ausrechnung, 165—178
Figuren des springenden Wassers, II. 888
Fische, III. 1100. 1146

Fisch. Der fliegende, III. 1147
der Südische, III. 1146
Fixsternen. Erklärung, III. 1101. Bewegung, 1151. Natur, 1336. parallaxis, 1254 1255
Fläche der Cörper. Wie sie zu finden, IV. 1807. 1808. wie sie Perspectivisch zu zeichnen, III. 1023 wie ihre Abweichung von Süden, Norden und dem Horizont zu finden, 1473
Flanc, II. 581
Flanque. Erklärung, II. 581. ihre Lage, 586. Figur, 587. 588. 589. Zahl, 588 589
Flecken in der Sonne, III. 1187. 1188. 1189 wie sie zu observiren, 1193
Flecken in der *Venere*, III. 1222
im Jupiter, III. 1222
in den Jupiters Monden, III. 1226
Fliege, III. 1147
Fliegender Fisch, III. 1147
Flüßige Materie. Erklärung, II. 801. ihr wagerechter Stand, 810. 811. ihr Druck, 813. 814
Flug, II. 532
Fluß *Eridanus*, III. 1146
Focus, IV. 1601
Fomahant, III. 1147
Fons Heronis, II. 899 900
Fortification. Erklärung, II. 563. Grund-Regeln, II. 564
Fries. Erklärung, 322 Beschaffenheit, 339 Höhe, 340
Fronton. Erklärung, 385. Beschaffenheit, 386

386. Höhe, 387
Zeichnung, 387.388
Frühling, III. 1392
1393
Fünf-Ecke. Erklärung, 119. wie seine Seite zu finden, IV. 1599. wie es geometrisch zu beschreiben, 1600
Fuhrmann, III. 1146
Fundamental-Linie, III. 1023
Futter-Mauren bey Festungen, II. 682
Fuß der Säule, 322
des Säulen-Stuhles, 321
Fuß Gesimse. Erklärung, 321. 322. wesentliche Glieder, 331
andere Glieder, 332
Höhe, 338. Auslaufung, 339. 340
Fuß-Mörser, II. 534
Fuß Riegel, II. 518
Gallerie, II. 702
703
Gallileänisches Fernglaß, III. 992
Gebäude. Erklärung, 290. wie davon gründlich zu urtheilen, 290. Unterscheid, 290. wie seine Eintheilung zu finden, 432. 449
450
Gebrochener Winckel. III. 914
Gebälcke, 320
Gedritt-Schein. III. 1343
Gefälle des Wassers, II. 773
Gefässe III. 1146
Gekuppelte Säulen, 369. 370
Geländer-Fenster, 423
Gelalerisches Jahr, III. 1435. 1436
Gemach, 432
Gemach-Thüre, 424
Gemäßigte Striche Landes, III. 1391
Gemeine Bewegung, III. 1099
Gemeines Jahr, III. 1430. 1431

Gemini, III. 1100
Gemma, III. 1147
Geographie, III. 1379
Geometrie. Erklärung, 109. ihr Nutzen, 111. 112
Geometrische Cörper. Wie sie zu machen, 214. 215
Linien, IV. 1623
Oerter, IV. 1701
Progreßion. Erklärung, 74. Eigenschafften, IV. 1559. wie sie zu summiren, 1559. 1560
Proportional-Zahlen. Wie sie zu finden, 94. 95. 96. 97
Verhältniß. Erklärung, 72. Eigenschafften, 74. 75. IV. 1582
Gerade Ascension. Erklärung, III. 1117. wie sie zu observiren, 1117. 1137. 1152. auf der Himmels-Kugel zu finden, 1118. wie ihr Unterscheid zu finden, 1136
Geradeläuffig, III. 1238
Geradelinichte Figur. Wie sie in Grund zu legen, 200. auszurechnen, 170. 171. 212. zu theilen, 183
Geradelinichter *Transporteur*. Wie er zu verfertigen, 282. 283. und zu gebrauchen, 283. 284
Gerade Linie. Erklärung, 114. Wie sie beschrieben und gemessen wird, 114. 115. 128. 129. ihre Eigenschafften, 123. 124. 125. und Theilung, 152. 189. 190
Gerade Zahlen. Ihre Eigenschafften, IV. 1554. 1555. 1556
Gesechst-Schein, III. 1342
Gesellschaffts-Rechnung, 102. 103
Geschlechte der algebrai-

bratschen Linien, IV. 1624
Geschliffene Gläser. Ihre Eigenschafften, III. 977. & seqq. IV. 1875
Geschütz-Kunst, II 487
Geschwindigkeit, IV. 1860
Gesichts-Linien, II. 580
Gesimse, 334
Gesimse zu Fenstern und Thüren, 417
Gestelle zu Ferngläsern, III. 1000
Gestirne, 1146. 1147 1148
Gesundes Auge. Wie es beschaffen, III. 920
Getrieb, II. 714
Gevierdt-Schein. III. 1343
Gewichte. Wie damit Machinen zu bewegen, II. 794. 795 und Kräffte zu verstärcken, 796. Unterscheid in den berühmten Städten, 830
Gewölbe. Erklärung, 444 Wie es aufzurichten, 445. 446
Wiederlage, 446 447
Giebelfeld, 385
Giebel-Zinne, 388
Gieß-Faß, II. 890. 891
Ginbat, III. 1434
Glacis, II. 602
Gläserne Feuchtigkeit, III. 916
Glaß. Wie man es schleiffet, III. 1018 1020. Welches zum Schleiffen gut ist, 1016. 1017
Glaß mit Wasser machet helle, III. 1014
Gleichheit der Winckel, 123
Gleich-schencklichter Triangel. Erklärung. 118. Eigenschafften, 148. 149 Beschreibung, 133
Gleichseitige Hyperbel. Er-

Erklärung, IV. 1655
Nutzen, 1839
Gleichseitiger Trian-
gel. Erklärung, 118
Beschreibung, 133
Eigenschafft, 149
Gleichung, IV. 1517
Glieder in der Bau-
Kunst. Erklärung,
323. Regeln ihrer
Zusammenfügung,
328. Proportion,
337
Gluende Kugel. Wie
sie in ein Stücke zu
laden, II. 525. Ihr
Gebrauch, 526
Gnomonick, III. 1471
Grab Christi, III.
1147
Graben. Seine Noth-
wendigkeit, II. 572
Beschaffenheit, 595
596. Breite, 594
wie sie zu finden,
674
Grad, 117
Gränzen, III. 1316
Granaten, II. 542
Gregorianischer Ca-
lender, III. 1463
Gregorianisches Jahr,
III. 1431
Gregorianische Mona-
the, III. 1432
Grösse. Erklärung,
IV. 1496. 1497. Ver-
änderungen, 1498
Zeichen, 1499. wie
sie gesehen wird, III.
918. 938. 939
Grösse der Bewegung,
IV. 1860
Grösstes, IV. 1774. 1775
Grösste Circul einer
Kugel. Erklärung,
III. 1041. Eigen-
schafften, 1042. 1043
1044. 1055. 1056
1065. 1077
Grösste *Conjunction*, III.
1343
Grosse *Conjunction*, III.
1343
Grosser *Radius*, II. 583
Gründe der Rechen-
Kunst, so willkühr-
lich, 46. 76

Grund des Gebäudes.
Erklärung, 393
Stärcke, 393. Bau, 394
Grundbau des Gebäudes, 394
des Walles, II. 679. 680
im Wasser, 404. 405
Grund-Graben, 399
Grund-Legung der Figuren, 200
Grund-Linie in der Perspectiv, III. 1023
Grund-Maure, 398. 399. 400. 401
Grund-Regeln der Fortification, II. 564
Grund-Riß eines Gebäudes. Erklärung, 577. 478. wie er zu machen, 478
einer Festung, III. 616
Grundsätze, 16
Güldene Zahl. Erklärung, III. 1447. wie sie zu finden, 1447. 1448
Gyps-Decke, 443
Haar der *Berenices*, III. 1446
Haase, III. 1146
Halb-*Caponieres*, II. 605
Halbe Carthaune, II. 502. 521. 530
Halbe Feld-Schlange, II. 502. 521. 530
Halbe Redoute, II. 670
Halber Mond. Erklärung, II. 598. Nutzen, 598. Zeichnung, 618. 644
Halbmesser, 116
Halb-Schatten, III. 1356
Halbes Falckonet, II. 502. 521. 530
Hamle, III. 1434
Hand-Faß mit einem Spring-Brunnen, II. 887
Hand-Granaten, II. 542
Hand-Mühlen, II. 792. 793
Han-

Hangende Mörser, II. 533
Harmonische Proportion, IV. 1590
Harte Haut, III. 916
Haubitz, II. 548
Haupt-Gegenden der Welt, III. 1091. 1402
Haupt-Gesimse. Erklärung, 321. Höhe, 338. 342
Haupt-Linie, II. 583
Haupt-Riegel, II. 518
Hauß-Thüre, 424. 425
Haziram, III. 1437
Hebel. Erklärung, II. 712. Eigenschafft, 724. Nutzen, 712
Heber, II. 892. 893. 895
Heilige Drey Könige, III. 1458
Heimliches Gemach, 452. 453
Heliocentrischer Ort, III. 1294
Herbst, III. 1392. 1393
Herbstmonat, III. 1432
Hercules, III. 1147
Herd, 462. 463
Herons-Brunnen, II. 901
Hertze des Löwens, III. 1146
Scorpions, III. 1146
Hesperus, III. 1221
Heumonat, III. 1432
Hexaëdrum, 240. 242
Himmels-Kugel, III. 1085
Hexagonal-Zahl, IV. 1569
Hitzige Striche Landes, III. 1391
Höhen. Wie sie zu messen, 198. 277. III. 929. 939. Wie weit man davon sehen kan, III. 1387
Höhe des Gemaches. Wie sie zu finden, III. 434
des neunzigsten. Wie sie zu finden, III. 1175. 1174
der Sonne. Wie sie zu finden, III. 1128. 1134

Höhe des springenden Wassers, II. 886
des Sternes. Erklärung, III. 1103. Wie sie zu messen, 1105
des Triangels. wie sie zu finden, IV. 1605. 1607
Hohe Ordnung, 340
Hohles Glaß. Erklärung, III. 977. Eigenschafften, 986. 990 IV. 1879
Hohl-Kehle. Erklärung, 324. Zeichnung, 325. Grösse, 338
Hohl-Leisten, 324
Hohl-Spiegel. Erklärung, III. 949 wie er zu machen, 961. Eigenschafft, 965. IV. 1880
Holländische Fortification. Maximen, II. 606. Ausrechnung der Winckel und Linien, 607. 608
Grund-Riß, 616
Profil, 621. Was davon zu halten, 623
Holländisches Fern-Glaß, III 992
Holtz. Eigenschafften, 298. warumb es in Gebäuden, so viel möglich, zu vermeiden, 299
Horizont, III. 1089
Horizontal-Linie, II. 717. III. 1023
Horizontal-Uhr. Erklärung, III. 1475 Zeichnung, 1477
Horn-Haut, III. 915
Hornung, III. 1432
Hornwerck. Erklärung, II. 600. Zeichnung, 620
Humor aqueus, III. 916
crystallinus, III. 916
Eigenschafften, 917 919. *vitreus*, III. 916
Hund. Der grosse und kleine, III. 1146
Hyades, III. 1147
Hydar, III. 1434
Hydra,

Hydra, III. 1146
Hydraulick, II. 873
Hydrostatick, II. 807
Hydrus, III. 1147
Hyperbel. Erklärung, IV. 1644. 1645. Beschreibung, 1646. Asymptoten, 1650 Eigenschafften zwischen den Asymptoten, 1651. 1652 Quadratur, 1798 Subtangens, 1759. 1760. wie sie aus dem Kegel geschnitten wird, 1658
Hyperbeln von höheren Geschlechten, IV. 1655. 1759
Hyperbolischer Ofter-Kegel, IV. 1828
Hypothesis, 22

JAcatit, III. 1434
Jährliche Epacten, III. 1449
Jagt-Hunde, III. 1148
Jahre der Gnaden, III. 1454
Jahres-Anfang, III. 1433
Jahr-Termin. Erklärung, III. 1441. Verschiedene Arten, 1454. 1455
Jahr-Zahlen. Wie sie mit einander zu vergleichen, III. 1456
Jahr-Zahl der Märterer, III. 1454
Januarius, III. 1432
Icosaëdrum. Erklärung, 240. Netze, 242
Idus, III. 1432. 1433
Jenner, III. 1432
Jiar, III. 1439
Immerwährender Calender, III. 1463
Inclination. Erklärung, III. 1288. wie die gröste zu observiren, 1291. wie die übrigen auszurechnen, 1292
Inclination der monathlichen Gräntze, III. 1316. 1317

Inclinations-Winckel, III. 915
Inclinirte Uhren, III. 1475
Indianer, III. 1147
Indianische Biene, III. 1147
Innere Polygon, II. 582
Instrument die Mittags-Linie zu finden, III. 1093. die Sole abzuwiegen, II. 831
Insuln im Mond, III. 1210
Integral-Rechnung. Erklärung, IV. 1786. Regeln, 1787
Integriren, IV. 1786
Intercolumnium, 370
Intervallum, III. 1264
Inversio rationum, IV. 1579
Inwohner der Planeten, III. 1233
Jomada, III. 1439
Jonische Ordnung. Erklärung, 337. Glieder, 350. 351
Irrational-Grösse, IV. 1511
Irrational-Zahlen. Erklärung, IV. 1512. ihre Rechnung, 1512. 1513. wie sie aus der Gleichung abzuschaffen, 1675
Irreguläre Cörper, 123
Irreguläre Figur. Erklärung, 120. Eigenschafft, 157. Beschreibung, 160. 161. Ausrechnung, 172. Festung, II. 651. Platz, wie er zur Regularität zu bringen, II. 651. 652. wie er zu fortificiren, 654
Italiänische Stunden, III. 1420
Juden-Jahr, III. 1439
Jüdische Stunden, III. 1420
Jüdisches Sonnen-Jahr, III. 1440
Julianischer *Periodus*, III.

III. 1452. sein Nutzen, 1453. 1454
Julianisches Jahr, III. 1430
Julianische Monathe, III. 1432
Julius, *III.* 1432
Jungfrau, III. 1100 1146
Junius, *III.* 1432
Jupiter, III. 1098. seine Flecken, 1226 Streiffen, 1224. Bewegung umb die Axe, 1223. und umb die Sonne, 1236 Aehnlichkeit mit dem Mond, 1231
Jupiters-Monden, III. 1224. ihre Bewegung, 1225. Weite vom Jupiter, 1225 Finsternisse, 1225. 1226 Flecken, 1226
Jupiters-Trabanten, III. 1224

Kälber-Zähne, 334 wie sie zu zeichnen, 365. wo sie, nicht zu gebrauchen, 386
Kämpffer. Erklärung, 378. Glieder, 378
Kalck. Von was vor Steinen er zu brennen, 312. 313. Proben, 313. Verwahrung, 314. 315
Kalte Striche Landes, III. 1391. 3192
Kammen. Wie sie einzutheilen, II. 751 ihre beste Figur, ibid.
Kammer. Wie sie beschaffen seyn sol, 434 436. 438. 439
Kammer im Mörser, II. 532 in der Mine, II. 552
Kamm-Rad. Erklärung, II. 714. wie es zu machen, 749
Kammer-Stucke, II. 549
Kap-Fenster, 434
Karnieß. Erklärung, 322. wesentliche Glieder, 331. andere

re Glieder, 331. 332
Höhe, 339. Auslauffung, 339
Kartetschen, II. 527
Regel. Erklärung, 122. Eigenschafften, 222. 223. Ausrechnung, 224. 233
Regelschnitte, IV. 1627
Kehle, II. 582
Kehlleisten, 324
Kehl-Linie. Erklärung, II. 582. ihre Grösse, 592
Keil. Sein Vermögen, II 764. Nutzen in der Artillerie, 529
Kern-Schuß, II. 531
Kessel, II. 532
Kirch-Thüre, 425
Klappen zu Plumpen, II. 882
Klarer Begriff, 6
Kleine Axe in der Ellipsi, IV. 1639
Defens-Linie, II. 582
Kleiner *Radius*, II. 583
der kleine Winckel, II. 584
ein Kleinstes, IV. 1774
Kloben. Erklärung, II. 715. ihr Vermögen, 762. 763
Knall-Pulver, II. 498
Knauf, 322
Knoten. Erklärung, III. 1288. wie sie zu observiren, 1290. ihre Bewegung, 1290. 1302
Kohlen zu Pulver. Wie sie zu brennen, II. 491. 492. ihre Eigenschafften, 494
Krafft, II. 710
Krafft, etwas unter dem Wasser zu erhalten, II. 833
Kragsteine Erklärung, 315. Gebrauch, 311. Zeichnung, 317. wo sie nicht zu brauchen, 386
Kranich, III. 1146
Krantz, 322
Krantz-Leisten, 324
Kron-Werck. Erklärung,

rung, II. 601. Zeichnung, 620
Krebs, III. 1100. 1146
Kriegs-Bau-Kunst, II. 563
Kripplein Christi, III. 1147
Krone, III. 1146
Kropf-Felgen, II. 749
Krumme Linie, 114
Kussen-Riegel, II. 518
Kütt. Wie er zu machen, 439. II. 539
welcher zum Glaßschleiffen dienlich, III. 1020
Kugel. Erklärung, 120. Eigenschaften, 120. 227. 228. 229. 230. 231. IV. 1620. Ausrechnung, I. 231. 232. IV. 1825. Erleuchtung, III. 925. wie das Licht darinnen gebrochen wird, III. 979. wie einer pfündigen Diameter gefunden wird, II. 506. wie ihre Gewichte zu vergleichen, 770. wie sie zu probiren, 524
Kugel-Circul, III. 1043
Kugel-Lehre, II. 524
Kugel-Säcke. Wie sie zu machen, 544. 545
Lade-Schauffel, II. 520. 522
Ladung im Mörser, II. 540. in Stücken, II. 521
Länge eines Orces, III. 1389. eines Planetens. Wie sie zu observiren, III. 1236. zu rechnen, 1294. eines Sternes. Erklärung, III. 1149. Wie sie zu finden, 1141. zunimmet, 1151. auf jede Zeit, auszurechnen, 1152.

Länge des Tages. Wie sie zu finden, III. 1123
Länglichte Raute, 119
Länglichtes Vierecke, ibid.
Längster Tag. Wie seine Grösse zu finden, III. 1399
Laffeten. Erklärung, 511. Zeichnung, 516
Laffeten der Mörser. Wie sie zu zeichnen, II. 535. 536
Lager im Mörser, II. 532
Land-Charten zu machen, III. 1409
Last, II. 710
Lauff im Geschütze, II. 514
im Mörser, II. 533
Lebendige Krafft, II. 710
Lebendiger Schwefel, II. 490
Lederne Stücke, II. 503
Leer-Bogen, 445
Lehrsatz. Erklärung, 21. 22. Was dabey zu bedencken, 22. seine Theile, 22. 23. 24
Lens concava, III. 977
convexa, III. 976
Leo, III. 1100
Leucht-Kugeln, Erklärung, II. 544 wie sie zu machen, II. 547
Leyer, III. 1146
Libra, III. 1100
Licht. Erklärung, III. 911. Eigenschafften, III. 911. 912. 913. 914. 915. 922. 923. 924. Warumb es von Weitem groß aussiehet, 941. Wie es geschwächet, 987 verstärckt, 968. und gebrochen wird, 974
Licht des Monds. Wie es ab und zunimmet, III. 1200 1201
des Mercurii. Wie es ab und zunimmet, III. 1220

Licht

Licht der *Veneris*. Wie es ab und zunimmet, 1219
Ligne de defense fichante, *II.* 582
flanquante, *II.* 582
Linéa apsidum, *III.* 1264
directionis, *II.* 716
Linie im Maasse, 115
Linie in der Geometrie, 113
Geographie, III. 1379
Linien an der Festung. Wie sie einander flanqviren, II. 585
Locus planus, *IV.* 1702
solidus, *IV.* 1702
Löwe, III. 1100. 1146
der kleine, III. 1148
Logarithmische Grössen. Wie sie zu differentiiren, IV. 1836. zu integriren, 1837
Logarithmische Linie. Erklärung, IV. 1662
Eigenschafften, 1835
Qvadratur, 1804
Subtangens, 1722
Nutzen, 1836. Cörper, so daraus erzeuget wird, 1829
Logarithmus. Erklärung, 256. Erfinder, 251. Eigenschafften, 256. 257. 258
Ausrechnung, 259 & seqq. IV. 1837
wie daraus die Zahl zu finden, 1837. wie grosser Zahlen Logarithmi zu finden, I. 265. Differential-Grösse davon, IV. 1836
Luchs, III. 1147
Lucifer, III. 1221
Lufft. Erklärung, II. 842. Eigenschafften, 846. 859. schwächet das Licht, III. 924. Wie man sie zusammen drucket, II. 857. 858
Lufft um den Mond, III. 1211. 1212
Lufft-Pumpe, II. 843

Maaß der Linien, 115

Maaß des Winckels, 117. 150
des sphärischen Winckels, III. 1043
Maaß-Stab. Die Ordnungen zu zeichnen, 359
Macedonisches Jahr, III. 1438
Machine. Erklärung, II. 711. Wie sie auf allerhand Art zu bewegen, 787
Magabit, III. 1434
Mahler-Kunst. Ihr Grund, III. 938
Mejazia, *III.* 1434
Majus. *III.* 1432
Marchesvan, *III.* 1439
Mars, *III.* 1093. Wie er durch Fern-Gläser observiret wird, 1222. seine Streiffen, 1222. Bewegung umb die Axe, 1223. Aehnlichkeit mit dem Mond, 1231 eigene Bewegung, 1237
Martius, *III.* 1432
Mascaam, *III.* 1434
Materie, IV. 1860
Mathematick Ihr Nutzen, 30. 31
Mathematische Lehr-Art. Erklärung, 5 wie weit sie sich erstrecket, 30. ihr Nutzen, 30
Maure. Erklärung, 393. Beschaffenheit, 405. 406. Bau und verschiedene Arten, 407. 408. 428. 430.
Maximen zu erfinden. Wo sie anzutreffen, 37. 38.
May, *III.* 1432
Mechanick, II. 709
Mechanisch philosophiren, II. 711. 712
Mecheir, *III.* 1433
Media & extrema ratione secare, *IV.* 1601. 1602
Meere im Mond, III. 1209
Meer-Sand. Wie er

er im Bauen zu gebrauchen, 311
Mehermah, *III.* 1435
Mehr, IV. 1499
Menschen im Mond, III. 1213
in Planeten, III. 1233
Mensis anomalisticus, *III.* 1304
Draconticus, *III.* 1303
Mercurius, *III.* 1098
wie er durch Fern-Gläser observiret wird, 1217. 1219
Bewegung um die Sonne, 1219. 1236
Parallaxis, 1190
Aehnlichkeit mit dem Mond, 1231. 1232
Mercurius in Sole, *III.* 1218
Meridianus. Erklärung, III. 1083. 1103 1382. wie der Unterscheid der Meridianorum zu finden, 1202. 1203
Merz, III. 1432
Mesori, *III.* 1433
Messen, II. 841
Meß-Rette, 129
Meß-Schnure, 130
Meß-Tischlein. Sein Gebrauch, 192
Metall. Woraus es gemacht wird, II. 503. Verhältniß der Schweere, II. 826
Methodus de maximis & minimis, *IV*, 1774
tangentium inversa, *IV*. 1831
Mezaninen, 412
Milchstrasse, III. 1148 1149
Micrometrum, *III.* 1214 1215. 1216
Minen. Erklärung, II. 552. Beschaffenheit, 553. 554. wie sie anzulegen, 557
Minute, 117. III. 1419
Mira, *III.* 1337
Mittag, III. 1091. 1096
Mittags-Circul, III. 1382
Mit-

Mittags-Höhe. Erklärung, III. 1103
wie sie zu messen, 1106. und auszurechnen, 1115. Nutzen, 1115
Mittags-Linie. Erklärung, III. 1090
wie sie zu finden, 1092
Mittags-Uhren. Erklärung, III. 1475
Zeichnung, 1480
Mittelpunct des Circuls. Erklärung, 116
wie er zu finden, 156. 213
der Hyperbel, IV. 1645
der Grösse, II. 717
der Schweere. Erklärung, II. 717
wie er zu finden, 719
Mitternacht, III. 1091
Mitternachts-Uhr. Erklärung, III. 1475
Zeichnung, 1481
Mittlere Anomalie. Erklärung, III. 1265
ihr Maaß, 1265
wie sie zu finden, 1271
Bewegung, III. 1265
Mittlere Theil eines sphärischen Triangels, III. 1045
Mittlere Zeit, III. 1418
Modul. Erklärung, 337. Eintheilung, 337. wie er zu finden, 341. für die oberen Säulen zu verjüngen, 390. 391
Mörser. Erklärung, II. 532. Materie, 532
Theile, 532. Zeichnung, 534. Richtung, 540. Ladung, 540. wie weit er trägt, 541. 542
Mörser zu Granaten, II. 543
Mörtel. Wie er zubereitet wird, 405. 406

Mohren-Jahr, III. 1434
Monathliche Æquation, III. 1311
Breite, III. 1318
Excentricität, III. 1306
Epacten, III. 1448
Monathliches Argument der Breite, III. 1316
der Länge, III. 1308 1309
Monathliche Scrupel der Länge, III. 1307 1308
Mond. Wie er durch Fern-Gläser erscheinet, III. 1206. Natur und Beschaffenheit, 1209. 1210
Aehnlichkeit mit der Erde, III. 1213. Bewegung um die Erde, 1897. 1240. Bewegung seiner Knoten, 1302. wie seine Berge zu messen, 1332. Charte darüber, 133. seine Grösse, 1327. und Weite von der Erde, 1320
Mond-Charten, III. 1332
Mond-Circul, III. 1446. Grösse, 1447
Monden-Jahr, III. 1429
Monden-Monath, III. 1427
Mond-Epacten, III. 1448
Mond-Finsterniß. Erklärung, III. 1202
Ursachen, 1201. 1202
Umbstände, 1201 1203. 1204. 1344
Ausrechnung, 1344
wie sie zu observiren, 1355
Mordad mah, *III.* 1435
Morgen, III. 1091
wie diese Gegend zu finden, 1096
Morgenröthe. Wie lange sie währet, 1172
Morgenstern, III. 1225
Morgen-Uhren, III. 1475

1475. Zeichnung, 1482
Motus latitudinis, *III.* 1303
librationis, *III.* 1223
reflexionis, *III.* 1253
Muhamedisches Jahr, III. 1438
Muharram, *III.* 1439
Muldengewölbe, 443
Multiplication. Erklärung, 42. Regeln für gantze Zahlen, 58. für Brüche, 79. für Buchstaben, IV. 1506. für Irrational-Zahlen, IV. 1516. Zeichen, 1500
Mundstücke, II. 510 511
Muschel-Linie, IV. 1659
Musteraka, *III.* 1435

Nabe, II. 519
Nabonasserisches Jahr, III. 1433. wie sein Anfang zu finden, III. 1434
Nacht, III. 1417
Nachts-Länge. Wie sie zu finden, III. 1126
Nadir, III. 1087
Nahase, *III.* 1434
Nahesäulig, 372
Nahme der Verhältniß, 72
Nahmen der Zahlen, 47
Natürlicher Tag, III. 1417
Nebelichte Sterne, III. 1149
Neben-Gegenden, III. 1402
Neben-Pfeiler, 378
Neben-Striche, II. 582
Neben-Winckel, 127 III. 1044
Neigungs-Winckel, III. 915
Nenner eines Bruches, I. 76
Netzförmiges Häutlein, III. 916
Neumond, III. 1200
Niedrige Ordnungen, 340
Nisan,

Nisan, III. 1439. 1440
Nodi. Erklärung, III. 1288. Bewegung, 1290. Ort, 1290. wie sie zu observiren, 1290
Nodus ascendens, III. 1288
australis, III. ibid.
borealis, ibid.
descendens, ibid.
Nonæ, III. 1432. 1433
Norden, III. 1402
Nordische Krone, III. 1146
Nord-Pol, III. 1086. 1381
Normal-Linie, IV. 1755
November, III. 1432
Numerus polygonus, IV. 1559

Obersaum, 324
Oberschlägiges Wasser-Rad. Erklärung, 764. wie es zu theilen, 780. wie das Wasser darauf zu leiten, 777. wo es zu gebrauchen, 776
Objectiv-Glaß, III. 992
Obliquitas ecliptica, III. 1113
Oblongum, 119
Occasus acronyctus, III. 1163
cosmicus, III. 1163
heliacus, III. 1164
Ochsen-Auge, III. 917
Octaëdrum, 240. 241
Octante, III. 1135
October, III. 1432
Oefen. Wie sie zu verbessern, 460. wie mit einem zwey Zimmer zu heitzen, 461
Ohren-Gewölbe, ibid.
Olympias, III. 1455
Ophiuchus, III. 1146
Optick. Erklärung, III. 911. Nutzen, III. 909
Opus rusticum, 430
Opposition, III. 1343
Ordentliche Figur, 120

Ordentlicher Cörper, 123
Ordinate, IV. 1624
ihre Verhältnis in der Parabel, 1632
und Ellipsi, 1640
Ordnung. Erklärung, 319. Ursprung, 318
335. Theile, 320
Zahl, 334. wie von ihnen zu urtheilen, 319. 320. wie sie zu erfinden, 334
und zu zeichnen, 362
363
Orillon, *II.* 588
Orion, *III.* 1146
Ort an dem Circul. Erklärung, IV. 1702
wie er zu construiren, 1711
an der *Ellipsi*. Erklärung, IV. 1702
wie er zu construiren, 1708
an einer geraden Linie. Erklärung, IV. 1702
wie er zu construiren, 1702. 1703
Ort an einer Hyperbel. Erklärung, IV. 1702. wie
er zu construiren,
1711
zwischen den Asymptoten, IV. 1713
an einer Parabel. Erklärung, IV.
1702. wie er zu construiren, 1703
der Sonne. Wie
er zu observiren,
III. 1115
des Bildes im Spiegel, III. 953. IV.
1868
Ort, wo jede Sache gesehen wird, III.
945
Ortus acronyctus, *III.*
1163
cosmicus, ibid.
heliacus, *III.* 1164
1166
Ost, III. 1402
Oster-Fest. Wenn
es zu feyren, III.
1458. wie es auszurechnen, III. 1459

Ouvrage a Cornes, II. 600
couronné, II. 601

Pachon, III. 1433
Pagans Fortification. Maximen, II. 623 Rechnung der Winckel und Linien, 624. Zeichnung, 626
Pagomen, III. 1434
Palilitium, III. 1147
Palliſaden, II. 603
Panſtrerzeug, II. 781
Paphi, III. 1433
Parabola. Erklärung, IV. 1627. Eigenſchafft, 1628. Beſchreibung, 1628 1634. 1703. 1832 1858. Quadratur, 1790. Rectification, 1811. Subtangens, 1756. wie ſie aus dem Kegel geſchnitten wird, 1656
Parabeln von höherem Geſchlechte. Erklärung, IV. 1625 Beſchreibung, 1630 1631. Eigenſchafften, 1635. Subtangens, 1754. Quadratur, 1791. Rectification, 1814
Paraboliſcher Afftergeometer-Regel, IV. 1808 1826
Parallaxis. Erklärung, 1179. Eigenſchafften, 1180. 1181. 1182
Parallaxis der Erd-Bahn. Erklärung, III. 1295. wie ſie zu finden, 1294 1295
der Fixſterne, III. 1254. 1255
Martis. III. 1322
Mercurii, III. 1190
der Sonne, III. 1322
Parallel-Circul, III. 1322
Parallelepipedum. Erklärung, 121. Eigenſchafften, 121 216. 218. 233. IV. 1782

1782. 1783. Aus-
rechnung, 217. 218
Netze, 243
Parallel-Linien. Er-
klärung, 120. Be-
schreibung, 140. Ab-
steckung auf dem
Felde, 146. Eigen-
schafften, 144. 145
147
Parallel-Lineal. Stru-
ctur und Gebrauch,
140. 141
Parallelogramma. Er-
klärung, 120. Ei-
genschafften, 167
180. 181. Theilung,
181. 212
Parameter, IV. 1627
1636. 1644
Partial-Finsterniß.
Erklärung, III. 1350
wie ihre Grösse zu
finden, 1350
Particulæ exsors, *III*.
1309. 1310
Paternoster-Werck, II.
875
Pauni, *III*. 1433
Pegasus, *III*. 1146
Pentagonal-Zahl, IV.
1509
Perigæum, *III*. 1264
Perihelium, ibid.
Periodischer Monath,
III. 1299
Periodus Juliana, *III*.
1452
Perpendicul an Uhr-
Wercken, II. 801
802
Perpendicular-Linie.
Erklärung, 118. Be-
schreibung, 141. 142
152
Perser-Jahr, III. 1435
Perseus *III*. 1146
Perspectiv, III. 1022
Perspectivische Risse,
480
Petarde, II. 549. 550
Petrus, *III*. 1147
Pfähle. Wie sie zum
Grund-Baue be-
schaffen seyn sollen,
396. 397. was bey
dem einrammen in
Acht zu nehmen,
397. 398. 399

Pfau, III. 1146
Pfeil, ibid.
Pfeiler, 215. wie sie ins Perspectiv zu bringen, III. 1028
Pflaster. Was für Figuren der Steine sich dazu schicken, 436
Pflaster-Ziegel, 436
Pfuhl, 324
Phamenoth, *III.* 1433
Pharmuthi, ibid.
Phœnix, *III.* 1146
Phosphorus, *III.* 1221
Pilaster, 315
Pisces, *III.* 1100
Places d' armes, *II.* 640
Plagæ, *III.* 1402
Planete. Erklärung, III. 1101. Bewegung durch den Thier-Kreiß, 1238 1239. 1279. wie die Eccentricität nebst dem Aphelio gefunden wird, 1282 wie ihre Grösse zu finden, 1328. Inwohner, 1333. ihre Natur, 1231. 1232 Verdeckungen unter einander, 1233 scheinbahre Diameter, 1235. 1236 Weite von der Sonne, 1273. und von der Erde, 1325 1295. 1234. Warum sie stille stehen und zurücke gehen, 1250. 1251
Planeten-Stunden, III. 1420
Platten. Erklärung, 323
Grösse, 338
Platter Spiegel. Erklärung, III. 949 wie er zu machen, 950. 951. Eigenschafften, IV. 1869
Plättlein. Erklärung, 323. Grösse, 338
Plejades, *III.* 1147
Plumpe, II. 879. 880 881
Plump-Stock, II. 880

Polar-Circul, III. 1102
Polar-Uhren. Erklärung, III. 1475
Zeichnung, 1483
Pol der Kugel, III. 1043
Pole der Ecliptick, III. 1113
Pol-Höhe. Wie sie zu finden, III. 1107 1111. 1115
Pollux, III. 1147
Polus antarcticus, III. 1086
arcticus, ibid.
Polygonal-Zahl. Erklärung, IV. 1569 wie sie zu finden, 1571
Polygone, 119
Polygon-Winckel, 157
Polyhedrische Gläser, III. 1015
Polynomische Wurzel, IV. 1532
Polyoptrische Gläser, III. 1015
Postement. Erklärung, 320. Beschaffenheit, 333. 381
Höhe, 339. Eintheilung, 342. Gebrauch, 321. 322
Postement-Gesimse. Erklärung, 321
Wesentliche Glieder, 331. andere Glieder, 331. 332. Höhe, 339. Auslaufung, 340
Postulata, 17
Potagen-Heerd. Wie er zu bauen, 463
Potentz. Erklärung, IV. 1508. Grade, 1508. 1509. Zeichen, 1509. Rechnung, 1509. 1510
Præsepe, III. 1147
Prisma. Erklärung, 121. Eigenschafft, 121. 216. 217. 233
Ausrechnung, 219
Netze, 243
Profil, II. 621. Zeichnung, 621. 622
wie sein Superficial-Inhalt zu finden

den, 671. wie der cörperliche zu finden, 675
Progressio arithmetica, 74. Eigenschafften, IV. 1559
geometrica, 74. IV. 1548
Proportio continua. Erklärung, 73. Eigenschafften, 93. 94 IV. 1577
Proportion. Erklärung, 73. Zeichen, 73. Eigenschafften, 93. 94. 95. 96. 111. 1068. 1069. IV. 1576 1579
Proportional-Linien. Wie sie zu finden, 187. 188. IV. 1720
Proportional-Zahlen. 94. 96
Prosthaphæresis, 111. 1267
Pultdach, 470
Pulver. Wie es gemacht wird, II. 495 496. Ursachen der Würckung, 496. Sätze, 496. womit es anzufeuchten, 495. 497. wie es reissend wird, 497. wie man es probiret, 498. 499. 500. 501 wozu es Anlaß gegeben, 488
Pulver-Mühlen, II. 497
Pulver-Sätze, II. 496
Punct. Erklärung, 113. Warumb er untheilbahr, 113. 114 116
Puncta flexus contrarii, IV. 1847
Pupilla, *III.* 916. 921
Püschel-Kunst, 875
Pycnostylon, 372
Pyramide. Erklärung, 122. Eigenschafft, 122. 221. 222 223. 233. Ausrechnung, 224. Netze, 244
Pyrobologia, *II.* 488
Pyrotechnia, ibid.

Qvadrat. Erklärung, 119. Beschreibung, 162 179. Eigenschafften, 163. Ausmessung, 165. 166 wie es ins Perspectiv zu bringen, III. 1024 1025

Qvadratische Gleichung. Erklärung, IV. 1534. wie sie aufzulösen, 1534. Exempel, 1536. 1537

Qvadrat-Linie, 165

Qvadrat-Maaß, 165 166

Quadratrix, IV. 1662

Qvadrat-Ruthe, 165

Qvadrat-Schuhe, ibid.

Qvadratur des Circuls, IV. 1799

der krummen Linien, IV. 1790

Quadratus, *III.* 1342

Qvadrat-Wurtzel. Erklärung, 82. wie sie gefunden wird, 85. IV. 1533. ihr Logarithmus, I. 257

Qvadrat-Zahl. Erklärung, 82. IV. 1569 wie sie entstehet, I. 83. 84. IV. 1532. 1533 1534. Eigenschafften, 1691. ihr Logarithmus, I. 257. ihre Differentien, IV. 1551

Qvadrat-Zoll, 166

Qvartier-Feld Schlange, II. 502. 521. 530

Rabe, III. 1146

Rabia, *III.* 1439

Rad an einer Axe, II. 713

Radelinie, IV. 1663

Radius des Circuls, 116 124. 250

der Evolute, IV. 1855

Räder der Lafferen. Wie sie zu zeichnen, 519

in der Mechanick. Wie sie zu berechnen, II. 745

Räder-Werck ohne Rammen, II. 754
Rajab, *III.* 1439
Ramadan, ibid.
Rarsäulig, 372
Rasen, II. 681
Ravelin. Erklärung, II. 598. Nutzen, 598. Zeichnung, 618. 627. 644
Raute, 119
Rechen-Kunst. Erklärung, 37. wie sie abzuhandeln, 37
Rechnungs-Arten. Ihr Ursprung, 40. 41. ihre Anzahl, 41. Nahmen und Erklärungen, 41
Rechter Winckel, 118. 150
Rechtwincklichter Triangel. Erklärung, 118. Eigenschafften, 143. 178. IV. 1607. 1609. 1615. 1731. 1741. wie sein Inhalt zu finden, IV. 1602
Rectangulum. Erklärung, 119. Beschreibung, 162. Eigenschafft, 163. Ausrechnung, 167
Rectification der krummen Linien, IV. 1811
Regel, *III.* 1147
Regel Detri, 97
Redoute. Erklärung, II. 666. Grund-Riß, 667. Profil, 668
Reduction zur Ecliptick, III. 1289. 1292
Reflexion. Erklärung, III. 913. Gesetze, 913. 914. IV. 1866
Reflexions-Winckel. III. 913
Refraction. Erklärung, III. 914. Gesetze, IV. 1873. wie ihre Grösse zu observiren, III. 974. 975
Refraction der Sonne, III. 1183. 1184. 1185
Refractions-Winckel, III. 914

Refringirter Winckel, III. 915

Regel *de quinque*, 100 101

Regiments-Stücke, II. 502. 521. 530

Reguläre Festungen, II. 651

Reguläre Figur. Erklärung, I. 120. Eigenschafften, 154 155. 157. 173. Beschreibung, 160. 161 Ausrechnung, 172

Reguläre Cörper. Erklärung, 123. Anzahl, 239. Netze, 241

Regulâres Dreyecke. Wie seine Seite sich zum Diameter des umschriebenen Circuls verhält, IV. 1594

Reguläres Vielecke. Wie es zu beschreiben, 160. 161. Ob Renaldinus es richtig zu beschreiben angewiesen, IV. 1617

Regula composita, 100 101

Societatis, 101. 102

Regulus, *III.* 147

Reißbret, 360

Reißkohlen, 492

Reißschiene, 360. 361

Retrogradus, *III.* 1238

Rhombus. Erklärung, 119. Beschreibung, 162. Eigenschafft, 167. Ausrechnung, 168

Riemlein, 324

Rinnleisten, 324

Ring um den Mond in der Sonnen-Finsternis, III. 1198 1199

Ring um den ♄, III. 1230

Röhre, II. 873

Röhren zu Fern-Gläsern, III. 1000

Römer Zinß-Zahl. Erklärung, III. 1451 wie sie zu finden, ibid.

Römische Ordnung, 336. 352

Römi-

Römischer Calender, III. 1432
Rolle, 715
Romanische Treppe, 467
Roß-Mühlen, II. 789 790
Rost zum Grundbaue, 400. 401
Rückgängig, III. 1238
Ruhe-Punct, II. 715
Ruhe-Riegel, II. 518
Ruthe. Erklärung, 115 Zeichen, 117

SAal. Wie er beschaffen seyn sol, 434. 447. 448 449
Sächsische Raute, III. 1148
Säule. Erklärung, 315. 320. Wie sie zu proportioniren, 317 318. Höhe, 339. wie sie zu verdünnen 318 368. wie eine über die andere zu stellen, 389. ihr Rang, 390
Säulen-Laube, 370
Säulen-Stellung, ibid.
Säulen-Stuhl, 320
Säulen-Weite. Erklärung, 370. Grösse, 371. 372. 373. was dabey in acht zu nehmen, 372. 373 374
Salpeter. Wie er zu läutern, II. 488. woher er kommet, 489 Eigenschafften, 493 494. 495
Sand. Wie er beschaffen seyn sol, 310 Probe, 310. 311. Arten, 311
Sapphiren, II. 700 701
Satellites Jovis, *III.* 1224
Saturnus, *III.* 1098. seine Gestalten, die man durch das Fern-Glaß observiret, 1229 1230. Aehnlichkeit mit dem Mond, 1231

Bewegung um die Sonne, 1237
Saturnus-Monden, III. 1227. 1230
Satz zu Feuer-Kugel-Zeug, II. 543
Schafft. Erklärung, 322. Beschaffenheit, 328 337. 338. wesentliche Glieder, 331 Höhe, 339
Schafft-Gesimse. Erklärung, 322. wesentliche Glieder, 331 andere Glieder, 332 Höhe, 339. Auslauffung, 340
Schalt-Jahr, III. 1429 1430. 1431
Schalt-Tag, III. 1429 1430
Schantz-Körbe, II. 683
Scharivar mah, *III* 1435
Schatten. Erklärung, III. 911. Eigenschafften, 911. 926. 927 928. wie seine Länge zu finden, 927. 928
930. wie dadurch die Höhen zu messen, 929. seine Figur, 930. 931. 932. wie er perspectivisch zu zeichnen, 1030
Schatten der Berge im Mond, III. 1207 1211
Scheere. Erklärung, II. 599. 600. Zeichnung, II. 619. 620
Scheibe des Klobens, II. 715
Scheinbahre Grösse. Erklärung, III. 939 wie sie zu finden, 940
Scheinbahre Horizontal Linie, II. 718
Scheinbahrer Diameter der Sterne, III. 1234. 1235
Scheinbahrer Horizont, III. 1090
Scheinbahre Zeit, III. 1418
Scheitel, IV. 1624
Schemmel-Mörser, II. 534

Schiefe Ascension. Erklärung, III. 1118. wie sie zu finden, 1119 1120
Schiefe der Ecliptick, III. 1113
Schiefe Descension, III. 1118
Schiefliegende Fläche, II. 715. 755. 756 812
Schieß-Scharten, II. 682
Schiff Jasons, III. 1146
Schlange, II. 502. 521 530. III. 1146
Schlangen-Mann, III. 1146
Schluß-Stein. Wie er zu zeichnen, 385
Schnell-Waage, II. 733 734
Schnörckel. 336. Zeichnung, 355
Schönheit. Erklärung, 291. wie sie zu erkennen, 291
Schönsäulig, 372
Schöpff-Rad, II. 878
Schöpff-werck, II. 877
Schorstein, 473
Schrancken der Wurtzeln in Gleichungen, IV. 1679
Schraube. Erklärung, II. 715. ihr Vermögen, 758. ihre Eintheilung, 759 760
Schraube-Mutter, II. 715
Schraube ohne Ende, II. 760
Schrifft. Wie sie auszulegen, III. 1248
Schüsseln zum Glaßschleiffen, III. 1017 1018
Schütze, III. 1100. 1146
Schüsse eines Stückes. Wie weit sie gehen, II. 529
Schuhe. Erklärung, 115. Zeichen, 117
Schulter-Winckel, II. 584
Schwan. III. 1146
Schwantz-Riegel, II. 518

Schwarze Haut, III. 916
Schweere. Erklärung, II. 718. ist unter dem Æquatore kleiner als gegen die Pole, III. 1253. 1254
Schweere der Cörper in flüßiger Materie, II. 815. 829
der Lufft, II. 847. 850
der Metalle und anderer Cörper, II. 826
Schwefel. Wie er zu läutern, II. 490. 491 welcher zum Pulver am besten, 490. wozu er dienet, 491 Eigenschafften, 493. 494. 495
Schweif der Comeeten. Was er sey, III. 1341
Schwung-Räder, II. 801. 802
Sclerotica, *III.* 916
Scorpion, III. 1100. 1146
Scorpius, *III.* 1100
Scrupel der Breite, III. 1316. 1317. 1318
der Währe, III. 1369. 1370
der Verfinsterung, III. 1349. 1350. 1368
Secans. Erklärung, 250 Ausrechnung, 255 Logarithmus, 266. 267
Sechsecke. Erklärung, 119. Eigenschafft, 161 Beschreibung, 162
Second flanc, *II.* 582
Sectio divina, *IV.* 1601
Sector. Eigenschafft, 173. Ausrechnung, 178
Secunde. 117. III. 1419 Wie sie in Trigonometrischen Rechnungen zu finden, I. 270
Secundirende Linie, II. 568
Seele eines Stückes, II. 510. 512. 513
Sehne, 116 im Circul, 153
Sehne

Sehne in der Parabel, IV. 1633
Seite der Polygonal-Zahl. Erklärung, IV. 1570. wie sie zu finden, 1573
Semidiameter, 116
Semiordinate, IV. 1624
Senckrechte Linie, 118
September, *III.* 1432
Serpentinel, II. 502 521. 530
Setzer, Ii. 523
Setz-Kolben, ibid.
Sextilis, *III.* 1342
Shaaban, *III.* 1439
Shabat, *III.* 1437
Shawall, III. 1439
Shebat, ibid.
Sicherpfahl, II. 786
Sichtbahre Bewegung des ☾ von der ☉, III. 1362. 1363
Breite des ☾, III. 1365
Finsternis, III. 1196
Länge des ☽, III. 1358
Sichtbahre Zusammenkunfft, 1364
Sidera Medicæa, 1224
Urbanoctaviana, III. 1228
Siebengestirn, III. 1147
Siegel-Wachs. Wie es zu machen, III. 1020
Sinus. Erklärung, 249 Eigenschafften, 249 250. 267. Ausrechnung, 251. Gebrauch, 268. IV. 1821 wie besonders der von 18°, IV. 1601 der von 22° 30′ 1596 der von 60°, 1595 und eines vielfachen Bogens zu finden, 1610. wie ihre Logarithmi zu suchen, I. 263. wie aus ihnen die Bogen zu finden, IV. 1819
Sinus artificialis, III. 1058
complementi, 250. 251
totus, 250
versus, 250. IV. 1821

Sivan,

Sivan, III. 1439
Solstitium. Wie es zu observiren, III. 1257
Sommer, III. 1392
Sonne. Ihre Flecken, III. 1188. Natur, 1189. Figur, 1191 Bewegung um die Axe, 1191. Bewegung durch den Thierkreiß, 1096 1098. 1262. ob sie sich um die Erde beweget, 1246. 1248 ihre Excentricität, 1264. wie sie die Fläche bescheinet, 1472 1473. ihre Weite von der Erde, 1325 ihre Grösse, 1330 1331
Sonnen-Circul. Erklärung, III. 1443 Grösse, 1444. wie er zu finden, 1445
Sonnen-Finsterniß. Erklärung, III. 1196 Umstände und Beschaffenheit, 1194 1197. 1198. 1199 Ursache, 1195. 1196 1211. wo sie gesehen wird, 1357. wenn sie sich ereignet, 1358 1358. wie sie ausgerechnet, 1358. und observiret wird, 1373
Sonnen-Jahr, III. 1428. wie seine Grösse zu finden, 1260
Sonnen-Monath, III. 1427
Sonnen-Stunden, III. 1121
Sonnen-Uhr, III. 1471
Sonntage. Auf welche Tage im Jahre sie fallen, III. 1446
Sonntags-Buchstaben. Erklärung, III. 1427. wie er zu finden, 1445
Sophar, III. 1439
Sphæra obliqua, III. 1398
parallela, III. 1396
recta, III. 1395
Sphærica, III. 1083
Sphärische Spiegel, III. 950

Sphärischer Triangel, Erklärung, III. 1041
Eigenschafften, 1045 1047. 1048
Sphärische Trigonometrie, III. 1041.
Sphärischer winckel, III. 1042
Spica virginis, III. 1147
Spiegel. Erklärung, III. 949. Eigenschafften, IV. 1867
Spiegel-Gewölbe, 445
Spiel, Raum. Erklärung, II. 504. wie er zu finden, ibid. sein Nutzen, 505
Spindel, II. 715
Spiral-Linie. Erklärung, IV. 1664
Subtangens, 1706
Quadratur, 1805
Spiral-Linien von unendlichen Geschlechten. Erklärung, IV. 1664. Subtangens, 1767. 1768
Quadratur, 1806 1807
Spitziger Winckel, 118 151
Spitzwincklichter Triangel, 118
Spring-Brunnen durch den Fall, II. 886. durch Heber, 892 durch die Wärme, 901. durch die Lufft, 899
Spring-Brunnen, der unterweilen aufhöret, II. 893
Stab. Erklärung, 324 Zeichnung, 324. Grösse, 338
Stäblein, 324
Staberzeug, II. 781
Stadt-Thor, 425
Stärcke der Linie, II. 568
Stamm, 322
Stampffer, II. 523
Stangen-Zirckel, 116
Stationarius, III. 1238
Stechheber, III. 891
Stehende Mörser, II. 533
Steine. Wie ihre Güte zu erforschen,

1304. wenn sie sollen gebrochen werden, 1306. wie man sie oeltränckет, 1401. wie sie im Grund-Baue zu legen, 401
Steinbock, III. 1100 1146
Stein-Carthaunen, II. 549
Stein-Galle, 305
Steinhauen. Wie es beschaffen, 445
Stein-Klippen im Mond, III. 1210
Stein-Stücke, II. 549
Stell-Riegel, II. 518
Stengel, 334
Stern. Wie lange er über dem Horizont bleibet, III. 1153 wenn er in Meridianum kommet, 1154 1158. wie er darinnen zu observiren, 1109. wenn er auf und untergehet, 1156. mit welchem Puncte der Ecliptick er aufgehet, 1159. 1160. 1162 wenn er mit der Sonnen untergehet, 1163. wenn er sich unter die Sonnen-Strahlen verbirget und wieder herausrücket, 1166. welche niemahls auf- und die niemahls untergehen, 1168 1169. ihre scheinbahre Grösse, 1149 ihre Anzahl, 1146 1149. Weite von der Erde und Natur, 1336. besondere Nahmen derselben, 1147
Stern im Auge, III. 916
Stern-Rad, II. 714
Stern-Schanze. Erklärung, II. 666
Grund-Riß, 669
Stiefel im Druckwercke, II. 882
Still-

Stillstand eines schweeren Cörpers, II. 718. 719. 721. 723
der Planeten, III. 1238
Stier, III. 1100. 1146
Stinckende Kugeln, II. 544
Stirn-Rad, II. 714. 749
Stock-Panster, II. 782
Stoß im Mörser, II. 532
Straub-Zeug, II. 781
Streiche, II. 581
Streichende Defens-Linie, II. 582
Streich-Winckel, II. 584
Streiffen, 324
Stuben. Wie sie beschaffen seyn sollen, 434. 447. 448
Stücke. Erklärung, II. 501. Arten, 501
Materie, 503. Theile, 510. 511. Beschaffenheit, 511. Ladung, 521. Richtung, 527. 528. Länge, 513. 514. Zeichnung, 515
Stückgiessen, II. 503
Stück-Pulver, II. 498
Stütze. Erklärung, 315. Gebrauch, 316. Beschaffenheit, 316. 317
Stumpffer Winckel, 118. 151
Stumpf-wincklichter Triangel, 118
Stunde. Erklärung, III. 1419. Arten, ibid. wie sie mit einander zu vergleichen, 1421
Stunde der ersten Bewegung, III. 1121
Stuffen auf der Treppe. Wie sie seyn sollen, 465. 466
Sturtz-Rinne, 324
Subnormal-Linie. Erklärung, IV. 1755

wie sie zu finden, 1762
Subtrangens. Erklärung, IV. 1754. wie sie zu finden, 1755
Subtrahiren. Erklärung, 42. Regeln für ganze Zahlen, 42. für gebrochene, 79. für Buchben, IV. 1502. 1503 für Irrational-Zahlen, 1514. Zeichen, I. 52. IV. 1499
Süden, III. 1402
Süder-Pol, III. 1086 1381
Südische Krone, III. 1146
Summe, 41
Summiren, IV. 1786
Summirende Zahlen, 41
Syllogismus. Nutzen in der Mathematick, 27
Symmetrie, 297
Syne, III. 1434
Synodischer Monath, III. 1299
Syrisches Jahr, III. 1436
Systema mundi Copernicanum, III. 1254
Tychonicum. III. 1241 1244.
Systylon, 372

Tabulæ æquationum, III. 1275
curtationum, III. 1293
inclinationum, III. 1292. 1293
latitudinum & longitudinum, III. 1145 1146
motus latitudinis, III. 1303
motuum mediorum, III. 1262
reductionum, III. 1293
sinuum & tangentium, 251
Tag. Erklärung, III. 1417. Wenn er die gantze Nacht durchschimmert, 1168. 1169 1170. Wie er ab- und zunimmet, 1393 wie

wie lang er währet, III. 1123
Tage-Circul, III. 1091
Tages-Anbruch. Erklärung, III. 1166
Ursache, 1167. 1168
wie er auszurechnen, 1168. 1169
Talud, II. 575
Tamuz, III. 1437. 1439
Tangens. Erklärung, 250. Ausrechnung, 255. Gebrauch, 271 272. 273. Logarithmus, 266. Eigenschafften, 271 Wie daraus der Bogen zu finden, IV. 1816
Tangens des vielfachen Winckels. Wie er zu finden, IV. 1613
der krummen Linien. Erklärung, *IV*. 1754. Wie er finden, 1755
Tauffe der Feuer-Kugeln, II. 546
Taurus, III. 1100
Tebeth, III. 1439
Tekuphæ, III. 1440
Tenaille simple, II. 599
double, II. 600
Terreplain, II. 575
Tetraëdrum. Erklärung, 240. Netze, 241
Theilung der geraden Linie, 189
Theorema, 21
Theorema Pythagoricum, 178. 179
Theorica, III. 1083
Thermometra concordantia, II. 864
Thermometrum, II. 857
Thermoscopium, ibid.
Thesis, 22
Thier-Kreiß, III. 1101
Thor an einer Festung, II. 684
Thor, III. 1433
Thüre. Erklärung, 424. Breite und Höhe, ibid. Figur, 425. Wie sie ins Perspectiv zu bringen, 1031

Thüre, die spritzet, wenn man durchgehet, II. 887
Thür-Schwellen, 425
Tiefe der Sonne, wenn der Tag anbricht, III. 1167. wie sie zu finden, 1173
Tisbrin, *III.* 1437. 1439
Todte Krafft, II. 710
Tonnen-Gewölbe, 444
Torricellianische Röhre, II. 854
Toucan, *III.* 1146
Total-Finsterniß, III. 1350
Transcendentische Linie, IV. 1625
Transporteur, 117
Trapezium. Erklärung, 119. Wie es zu theilen, 182
Traversen. Erklärung, II. 603. Nutzen, 603. 604. Zeichnung, 647
Trenchéen, *II.* 690
Treppe. Erklärung, 464. Beschaffenheit, 464. 465. 466. Zeichnung, 468
Triangel. Erklärung, 118. Eigenschafften, 131. 143. 146. 147. 148. 149. 168. 178. 186. 187. 188. III. 1047. IV. 1613. Beschreibung, I. 133. 134. Ausrechnung, 169. IV. 1607. Theilung, I. 212. wie er ins Perspectiv zu bringen, III. 1023. 1024.
Triangel. Der südische, III. 1146. der nordische, ibid.
Triangular-Zahl, IV. 1569
Triangulum æquatorium, *III.* 1267. *æquilaterum*, 118. *æquicrurum*, ibid. *Scalenum*, ibid.
Triglyphen, 364
Trigonometrie. Erklärung, 249. Nutzen, 247. 248

Trigonus, *III.* 1343
Trillings-Stöcken, II. 751
Trinomische Wurtzel, IV. 1532
Trompeter-Gänglein, 423. 424
Tropicus cancri, *III.* 1102
capricorni, *III.* 1381
Trilling II. 714. 753
Tünchen, 428. 429
Tuscanische Ordnung. Erklärung, 336. Glieder, 343
Tybi, *III.* 1433
Tykymt, *III.* 1434
Tyr, *III.* 1434
Tyshas, *III.* 1434

V
Variation, *III.* 1314 1315
Vaubanische Fortification. Maximen, II. 637. Ausrechnung der Linien, 638 Grund-Riß, 641 Profil, 645. Werth, 647
verstärckte Manier, Maximen, 648
Grund-Riß, 649
Werth, 650
Veadar, *III.* 1439
Uberschlag, 324
Vectis homodromus, *II.* 739
heterodromus, ibid.
Ventil, II. 880
Venus, III. 1098. ihre Aehnlichkeit mit dem Mond, 1231 Flecken, 1222. Bewegung um die Axe, III. 1223 um die Sonne, 1219 1237
Venus in Sole, *III.* 1218
Veränderliche Grösse. Erklärung, IV. 1747 Zeichen, 1748
Verbürste Circul, 444
Verdeckter Weg, II. 602
Verdruckte Circul, 444
Verdünnung der Säulen, 318
Vergrösserungs-Gläser, III. 988. 989 1010

1010. wie viel sie vergrössern, 1008
1009
Verhältnis, 73. ihre Veränderungen, IV. 1579. 1580. welche in der Bau-Kunst zu gebrauchen, I. 295
296
Verhältnis der Irrationals-Grössen, IV. 1514
Verjüngter Maaß-Stab, 129. 190. 191
Verkleinerungs-Gläser, III. 990. 991
Verkehrte Regel Detri, 100
Verkehrter Karnieß, 326
Vertical-Circul, III. 1103
Vertical-Uhren, III. 1475
Vertical-Winckel, 127
III. 1044
Vieleck, 119
Vieleckichtes Glaß, III. 1015
Viertel des Monde, III. 1201
Viertel-Feld-Schlange, II. 502. 521. 530
Viertel-Feld-Stücke, ibid.
Viertel-Stab. Erklärung, 324. Zeichnung, 325. Grösse, 338.
Vindemiatrix, *III.* 1147
Virgo, *III.*, 1100
Visir-Schuß, II. 531
Visir-Stab, 234. 235
Unbewegliche Feste, 1457. 1458
Undeterminirte Aufgabe, IV. 1689. Exempel dazu, ibid.
Undeutlicher Begriff. Erklärung, 7. wenn man mit ihm zufrieden seyn kan, 8
Unendlich kleine Grösse, IV. 1745. 1746
Unförmige Sterne, III. 1148
Ungerade Zahlen. Ihre Eigenschafften

ten, IV. 1554. 1555
1556
Ungleichseitiger Tri-
angel, 118
Unordentliche Figur,
120
Unordentlicher Cör-
per, 123
Unter-Balcken, 322
Untergang der Sterne,
III. 1090. 1156
der Sonne, III.
1126
Unsichtbahr. War-
um einige Sachen
werden, III. 919
Unsichtbahre Finster-
nis, III. 1196
Untersaum, 324
Unterscheid, 42
Unterschlägriges Was-
ser-Rad. Erklä-
rung, II. 765. wo
es zu gebrauchen,
776. wie das Was-
ser darauf zu leiten,
783
Unveränderliche Grös-
se. Erklärung, IV.
1747. Zeichen, 1748
Unvollständiger Be-
griff, 8
Voll-Erde, III. 1335
Vollmond, III. 1201
Vollkommenheit einer
Festung, II. 563
eines Gebäudes,
290
Vollständiger Begriff,
7
Vorgebürge im Mond,
III. 1210
Vorgemächer. Wie sie
beschaffen seyn sol-
len, 434
Vorstechung, 321

Wende. Wie sie
ins Perspectiv
zu bringen, III.
1028
Wärme. Wie sie bald
ins Zimmer dringet,
439
Wässerige Feuchtigkeit,
III. 916
Waffen-Plätze, II. 640
Wage. Erklärung, II.
728. wie sie zu ma-
chen,

chen, ibid. zu probiren, 729
Waage, III. 1100. 1146
Wahre Bewegung, III. 1265
Wahrer Horizont, III. 1089
Wahre Wurzel, IV. 1664
Wall. Seine Nothwendigkeit, II. 572
Höhe, 577. 578. Figur, 579. 580. wie er aufzuführen, 680
Wallfisch, III. 1146
Wallgang, II. 575
Walze, 121
Wand-Pfeiler, 315
Wand-Säule, ibid.
Wasser. Wie es zu Bewegung der Mühlen gebraucht wird, II. 765
Wasser-Kunst, II. 884. 885
Wasser-Schlange, III. 1146. 1147
Wasser-Mann, III. 1100. 1146
Wasser-Schraube, II. 873
Wasser-Stand, II. 776
Wasser-wägen, II. 769. 774
Wasser-Wage, II. 769
Wehr-Bau, II. 785
Weinmonat, III. 1432
Weiten der Oerter. Wie sie zu messen, 136. 137. 138. 192. 279. 280. III. 1383. 1408
der Planeten von der Erde, 1325. 1295. 1298
von der Sonne, III. 1273. 1197
der Sterne. Erklärung, III. 1134
wie sie zu observiren, 1134. 1135
Nutzen, 1136
Weitsäulig, 372
Welsche *Practica*, 105
Welt. Wie sie aussiehet, III. 1084. 1085
Welt-Axe, III. 1087
Welt-Baue (neue) 1336
Welt-

Welt-Gebäude. Wie es beschaffen, III. 1248
Welt-Gegenden, III. 1402. 1403
Welt-Kugel, III. 1085
Welt-Pole, III. 1086
Wendel-Treppe. Erklärung, 467. Beschaffenheit, ibid. Zeichnung, 468
Wendungs-Punct. Erklärung, IV. 1847 wie er zu finden, 1850
Weniger, IV. 1499
Wesentliche Glieder, 331
Wetter-Glaß. Wie es zu machen, II. 860. Besondere phænomena, 862 863
Widder. III. 1100. 1146
Wiederkehrungs-Punct. Erklärung, IV. 1847. Wie er zu finden, 1850
Wiederlage der Gewölber, 446. 447
Widerstand in Bewegung der Machinen, II. 799
Widerstehende Krafft, II. 808
Winckel. Erklärung, 117. Maaß, ibid. Eigenschafften, 124 125. 146. 147. 150 Wie er zu messen, 128. zu beschreiben, 130. auf dem Felde abzustecken, 137. Theilung in zwey Theile, 156
Winckel in regulären Vielecken, 157 in jedem Vielecke, 158
Winckel, der allzuspitzig. Wie er zu fortificiren, II. 661 der einwarts gebogen. Wie er zu fortificiren, 662
Winckel an der Peripherie, 150. 151
an der Sonne, III. 1266. 1294

Winckelhacken, I 43
151
Winckelmesser, I 17
Wind, II. 505
Wind-Mühlen, II. 787. 788
Wind-Raum, II. 504
Wind-Wage. Erklärung, II. 843
Wie sie zu machen, 865. und zugebrauchen, 866. 867
Winter, III. 1392
Wintermonat, III. 1432
Wischer, II. 523
Wischkolben, ibid.
Woche, III. 1426
Wolff, III. 1146
Wohlgereimheit, 297
Würffel 122
Würffel in der Baukunst. Erklärung, 321. Beschaffenheit, 328. 329. Höhe, 339. Auslaufung, 340
Wulst, 324
der Wunderbahre Stern, III. 1337
Wurzel. Ihre Arten, 1537. IV. 1664
Rechnung mit Buchstaben, 1509. wie sie aus jeder Dignität zu ziehen, 1548. Ausziehung, I. 85. 90
Wurtzel der Gleichung. Erklärung, IV. 1664
Eigenschafften, 1665. 1666. Veränderungen, 1667. Schrancken, 1679. Auszihung, 1681. Wie sie durch Näherung zu finden, 1684
Wurtzel-Täffelein, 83
Wurtzel-Zeichen, IV. 1511

Y

Yezdegerdisches Jahr, III. 1435. 1436. wie sein Anfang zu findē, 1436

Z

Zapffen, 364
Zahl. Erklärung, 38
Beschaffenheit, 39. 40. ihre Veränderungen, 40. 41. wie sie

sie ausgesprochen wird, 47. 48
Zahl der Winckel in der Polygonal-Zahl, IV. 1570
Zapffen-Stücke, II. 511 512
Zauber-Laterne, III. 1011
Zehenecke. Wie seine Seite zu finden, IV. 1598. 1599
Zehlen. Was es heisse, 38
Zehler eines Bruches, 76
Zeltdach, 471
Zeichen der Zahlen, 47
der Zeit, III. 1441 1442
Zeichnen. Wie solches genau geschehen kan, III. 1036
Zeichnung der Figuren, 135. was sie nutzet, 136
Zeiger. Die Mittags-Höhen zu finden, III. 1108
Zeit. Wie man sie aus der Höhe der Sonne, III. 1128 und der Sterne findet, 1176. 1178. 1179
Zenith, III. 1087
Zeugmeisterey-Kunst, II. 487
Zerstreuungs-Punct, III. 988
Ziegel. Wie sie zu streichen, 306. zu probiren, 309. 310
Ziegel-Erde. 309
Zieh-Panster, II. 782
Zieh-Pengel, II. 760
Ziffern, 47
Zimmer. Ihre Figur, 432. Verhältnis der Länge zur Breite, 433. Höhe, 433. 434 wie sie anzulegen, 450. 451
Zierrathen des Gebäudes. Erklärung, 292. wie viel sie nöthig, 293. 294
Zirckel, 16
Zodiacus, III. 1101

Zoll. Erklärung, 115
Zeichen, 117
Zonæ frigidæ, III. 1391
temperatæ, *III.* ibid.
Zona torrida, *III.* ibid.
Zündloch im Stücke, II. 516
Zünd-Röhre in der Bombe, II. 538
Zusammendrücken, II. 842
Zusammenkunfft, III. 1342
Zusätze. Erklärung, 28 Unterscheid, 28. 29
Zwerch-Axe, IV. 1644
Zwey mittlere Proportional-Linien. Wie sie zu finden, IV. 1720
Zwillinge, III. 1100. 1146
Zwischen-Tieffe, 328

Ende des Registers.

Druckfehler im I. Theile.

Pag.	Lin.	Druckfehler.	wie sie zu ändern
15	10	einen	eines
44	4	Qvoteneen	Qvotienten
45	1	kömmen	kommen
62	5	I. 2.	2. 2.
105	28	beygefüg-	beygefügten
115	37	mercker	mercken
126	20	AIE	AFE
ibid.	22	ADI+IE	AF+FE
142	20	C	in C
148	5	Linee	Linie
218	19	perallelogramum	parallelogrammum
228	24	300	wie 300
250	18	a-	aber
299	15	1780	1708
399	23	überkommen	übereinkommen
408	9	drey	drey Schuhe hoch geführet/so mauret drey
410	5	Tage	alle Tage

Im

Druckfehler

Im II. Theile.

Pag.	Lin.	Druckfehler.	wie sie zu ändern.
537	14	Röhne	Röhre
554	7	Beläaerugen	Belägerungen
558	20	spielen	spielen sol
573	23	fendlichen	feindlichen
606	24	Trignometrische	Trigonometrische
622	32	ioiches	solches
854	28	Torricillanischen	Torricellianischen
767	27	Gebrach	Gebrauch
774	18	Höhe	die Höhe
788	15	noch	nach
791	1	Mechannick	Mechanick

Im III. Theile.

919	22	Catelii	Cartelii
976	23	mit	wie
1020	5	viererley	vielerley
1026	11	mach	nach
1035	15	Mitel	Mittel
1035	15	Li-	Linie
1055	7	spährischen	sphärischen
1063	ult.	dem	ist dem
1117	10	Ecliptick	der Ecliptick
1178	17	Pol. Höhe	der Pol-Höhe
1343	1	Gedritt-Geschein	Gedritt-Schein
1379	8	den	denen

Im IV. Theile.

1493	5	mathemathische	mathematische
1520	30	x	$2x$
1522	22	Der	Das
1531	12	Dem.	Demnach
1532	2	Thele	Theilen
1576	11	determiren	determiniren
1615	ult.	Seiten	Seiten zu finden
1804	15	und ihrer Axe.	zwischen der Logarithmica und ihrer Axe.

Be-

Bericht an den Buchbinder.

Die Kupffer müssen zu Ende einer jeden Disciplin dergestalt gebunden werden/ daß man sie gantz heraus schlagen kan.

Nemlich im ersten Theile.

p. 245. Fig. Geom. Tab. I. bis XXIV.
p. 284. Trigon. Tab. I. bis III.
p. 480. Archit. Tab. I. bis XXX.

Im andern Theile.

p. 558. Fig. Artiller. Tab. I. bis VII.
704. Architmil. Tab. I. bis XII.
802. Mechan. Tab. I. bis VI.
836. Hydrostat. Tab.
868. Aërometr. Tab.
904. Hydraul. Tab. I. bis III.

Im dritten Theile.

p. 948. Fig. Optic. Tab.
973. Catoptr. Tab.
1021. Dioptr. Tab. I. II.
1036. Perspect. Tab. I. II. III.
1078. Trig. Sphær. Tab.
1362. Astron. Tab. I. bis VIII.
1412. Geogr. Tab. I.
1488. Gnomon. Tab. I. II. III

Im vierdten Theile.

p. 1880. Fig. Algebr. Tab. I. bis XI.

)o(

Bayerische Staatsbibliothek München

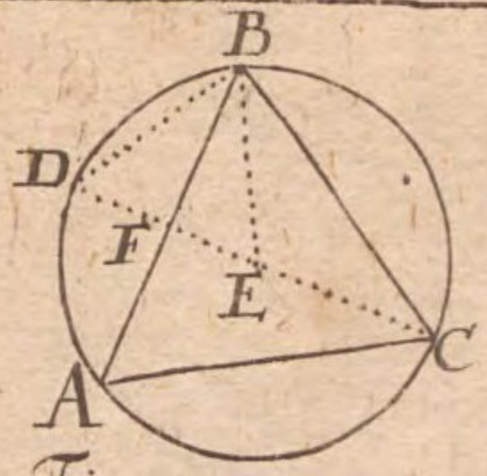


Fig: 1.

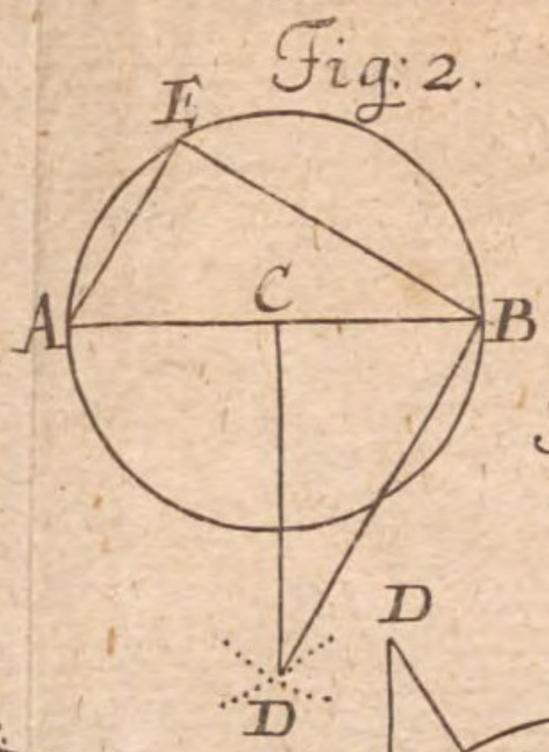


Fig: 2.

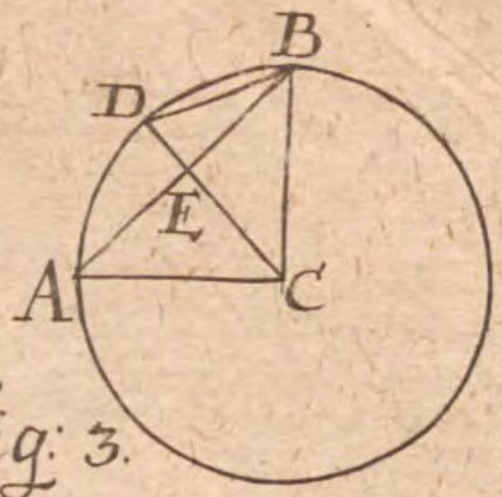


Fig: 3.

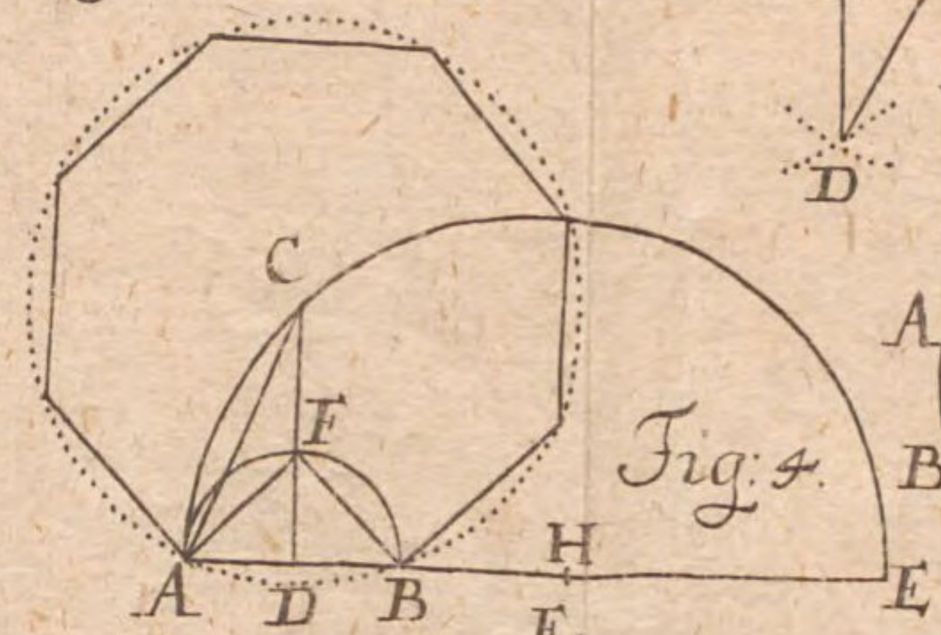


Fig: 4.

Fig: 5.

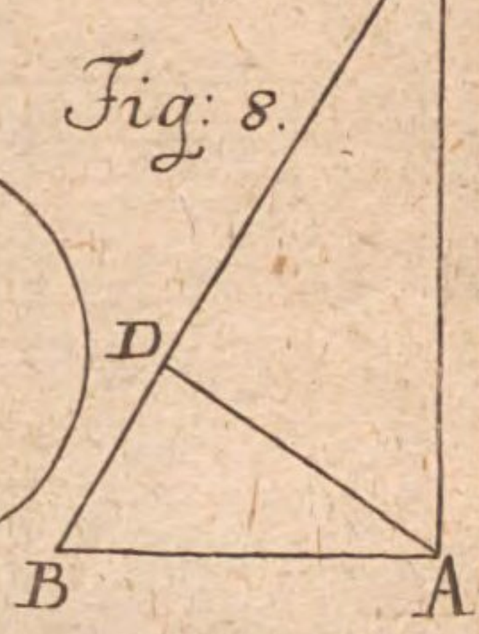


Fig: 8.

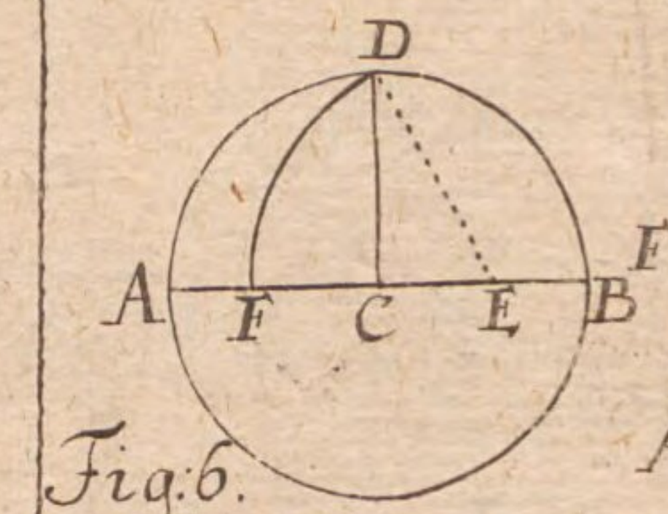


Fig: 6.

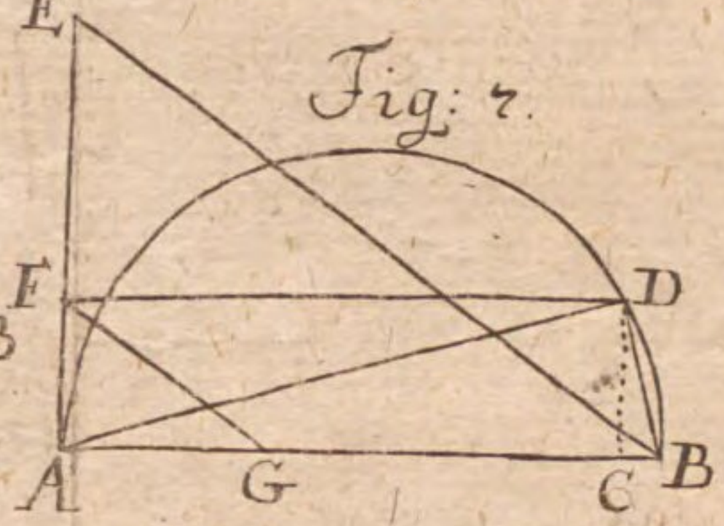


Fig: 7.

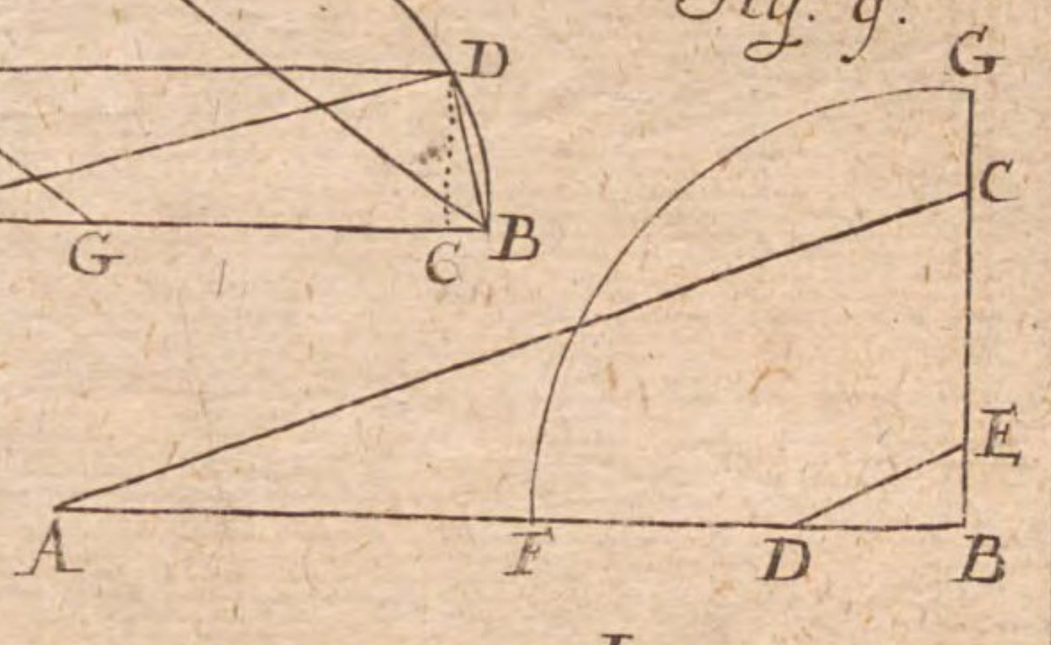


Fig: 9.

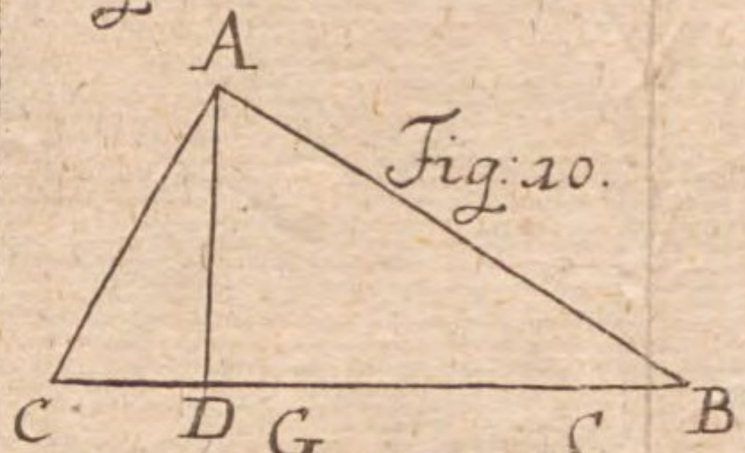


Fig: 10.

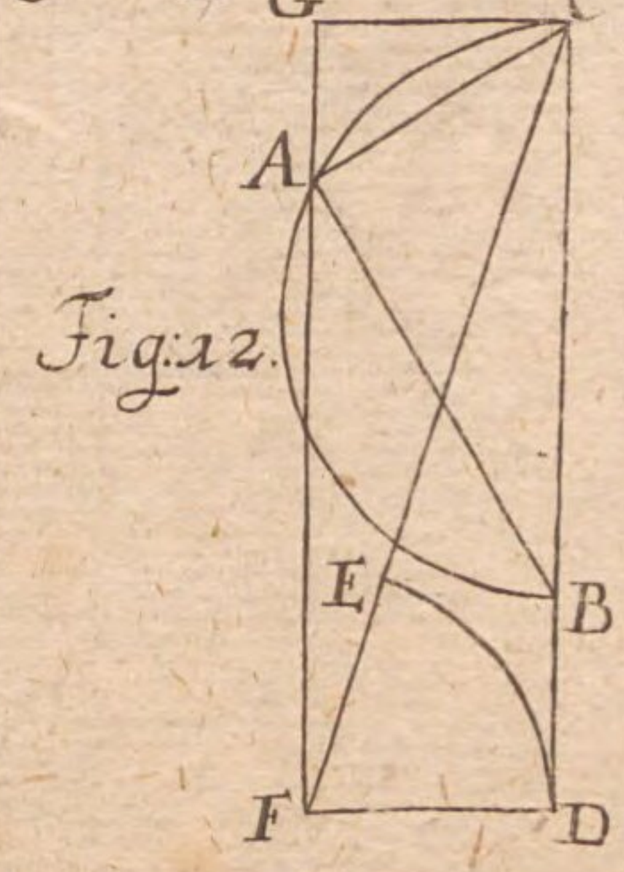


Fig: 12.

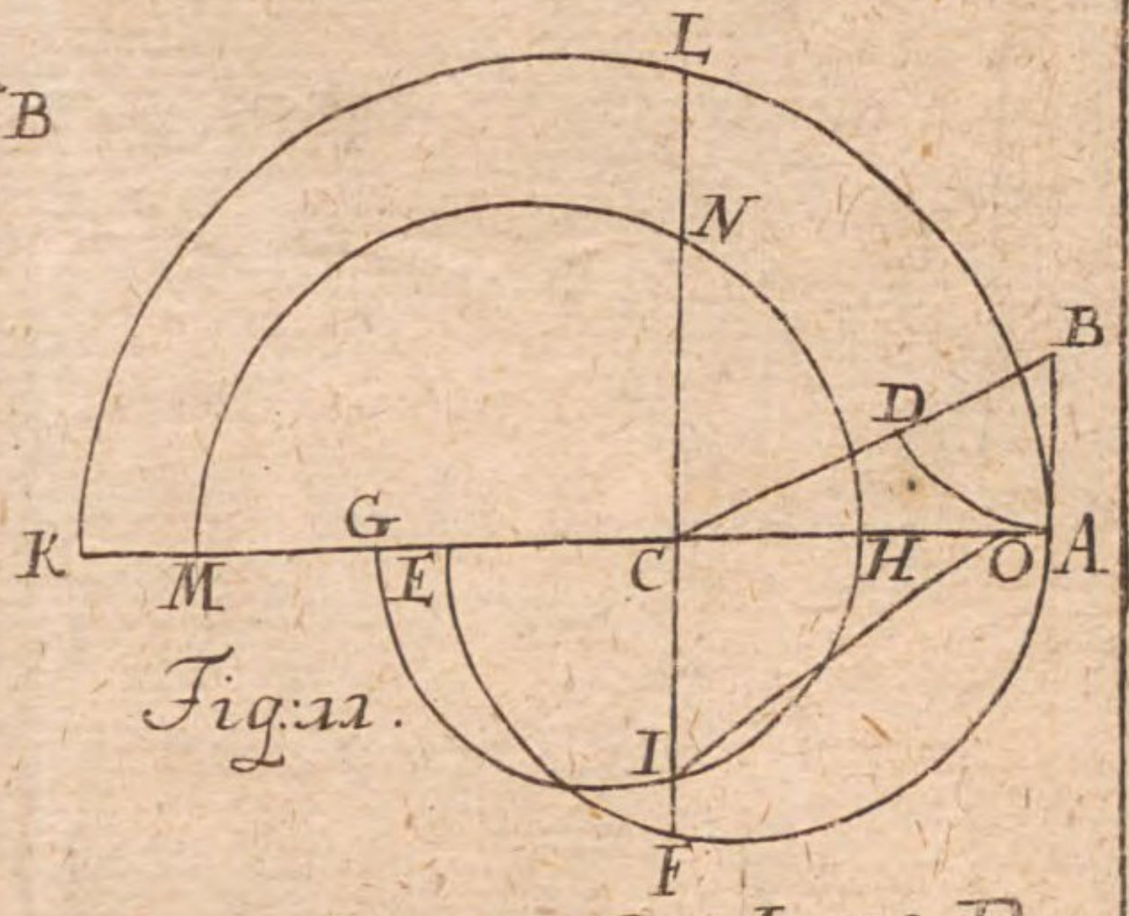
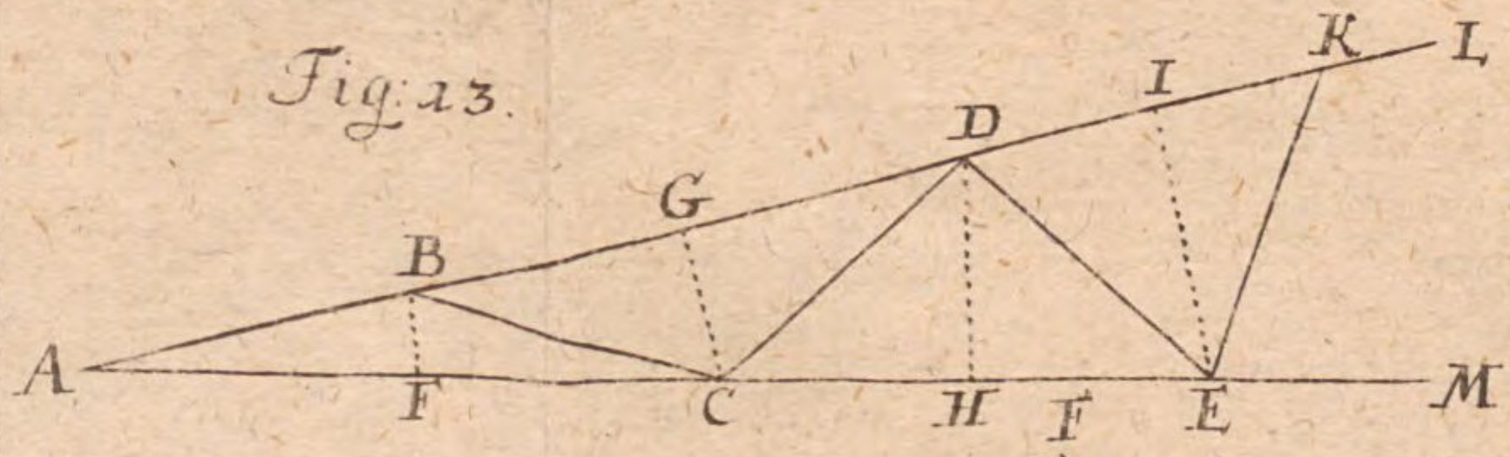


Fig: 11.

Figur: Algebr: Tab: I. Lit: P. 5

Fig: 13.



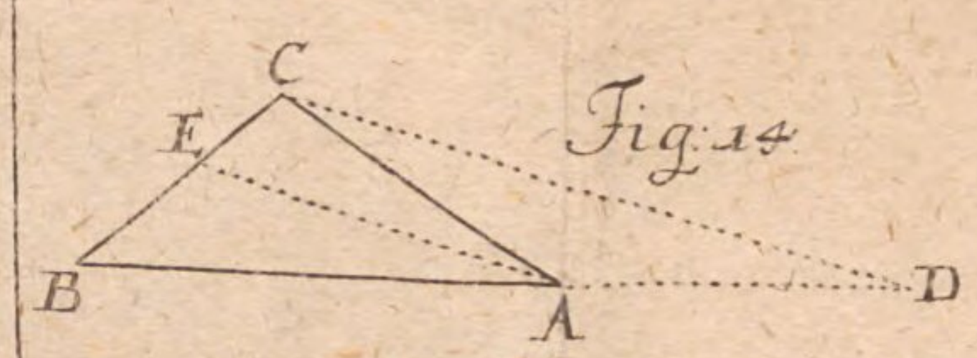


Fig: 14.

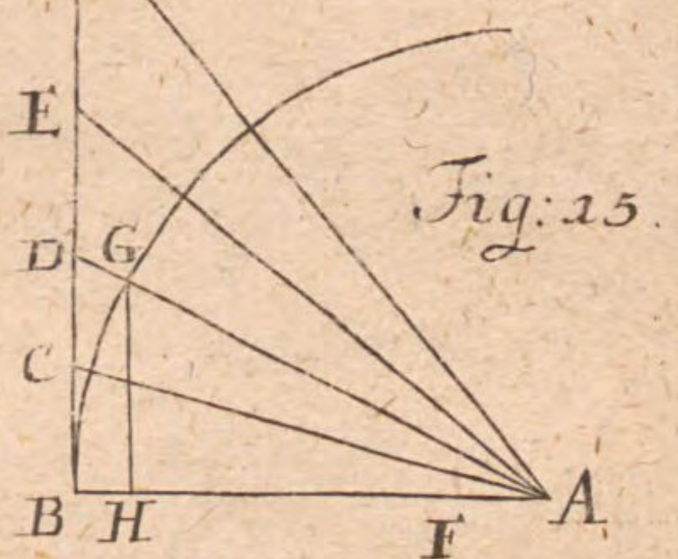


Fig: 15.

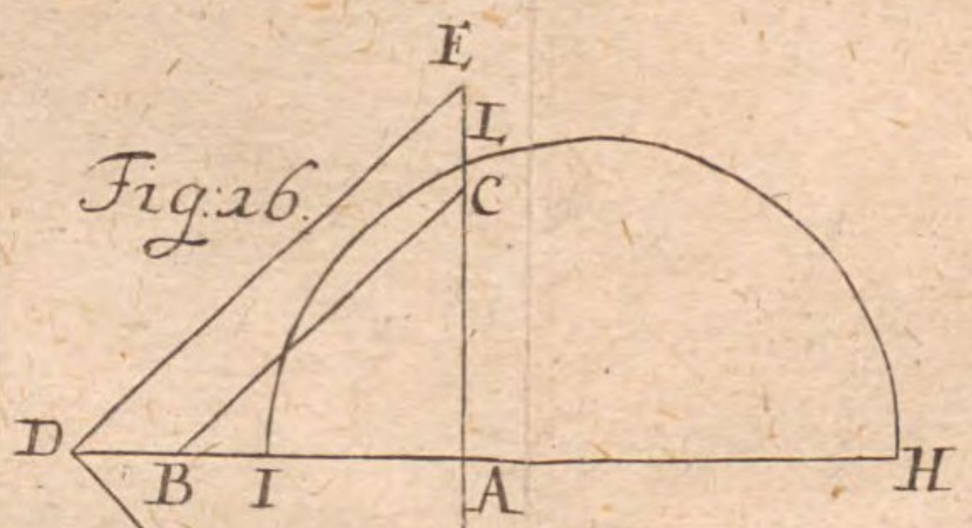


Fig: 16.

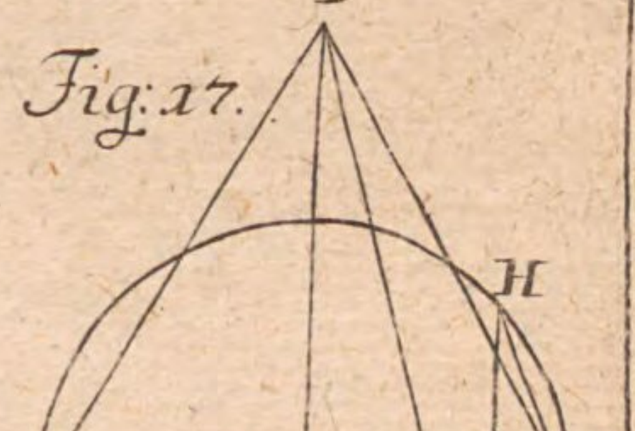


Fig: 17.

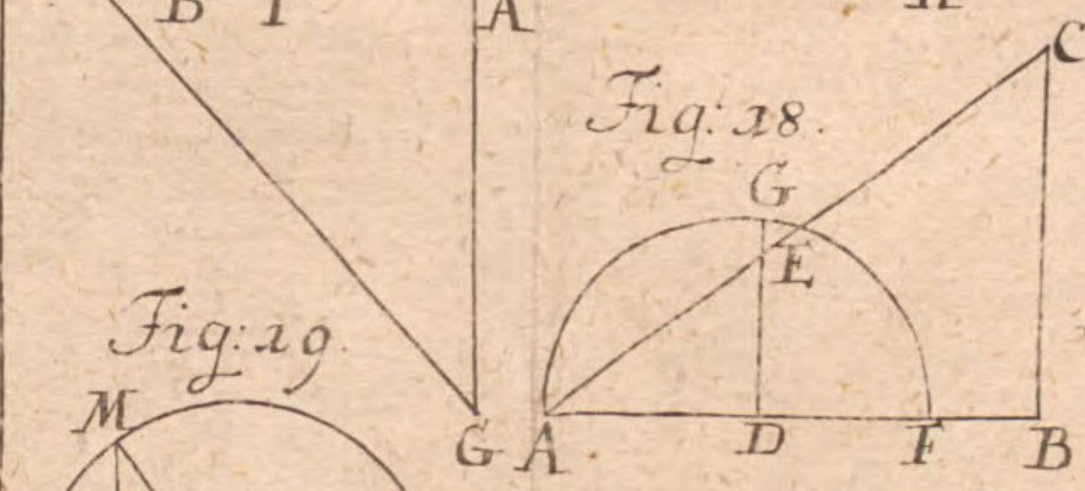


Fig: 18.

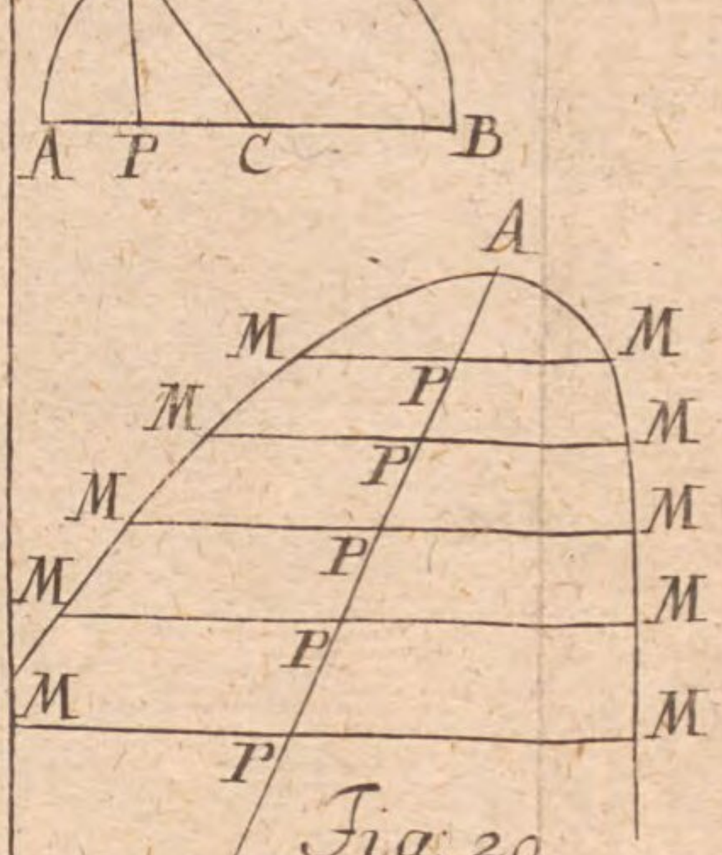


Fig: 20

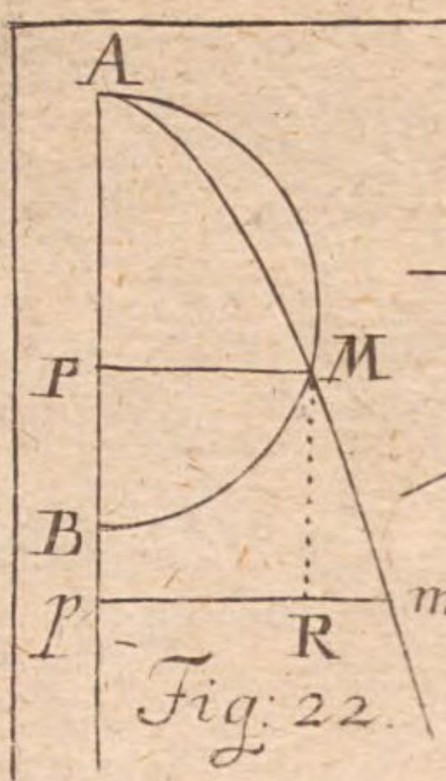


Fig: 22.

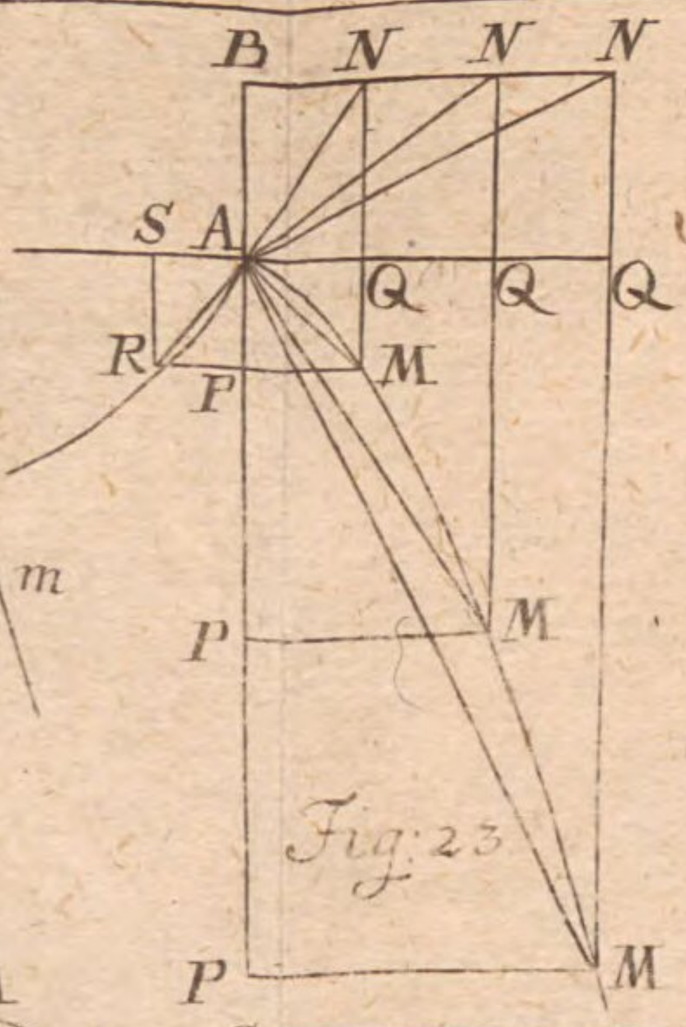


Fig: 23

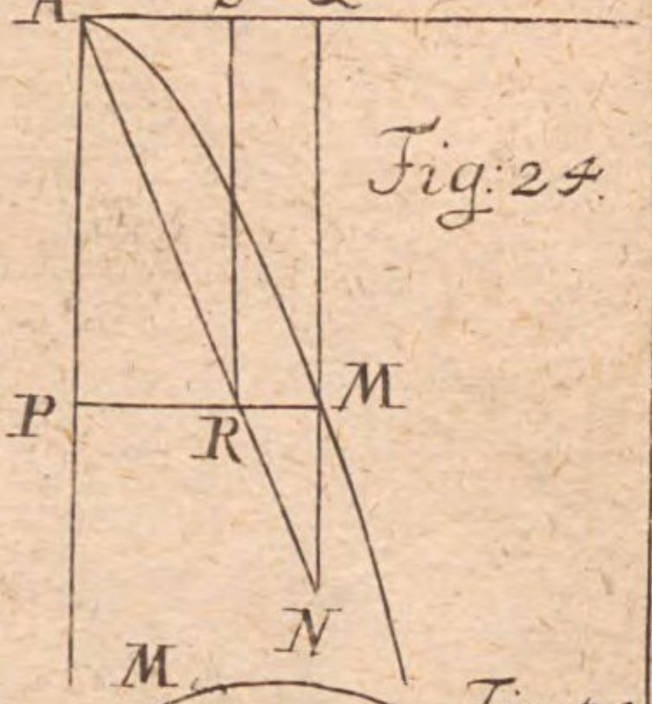


Fig: 24.

Fig: 31.

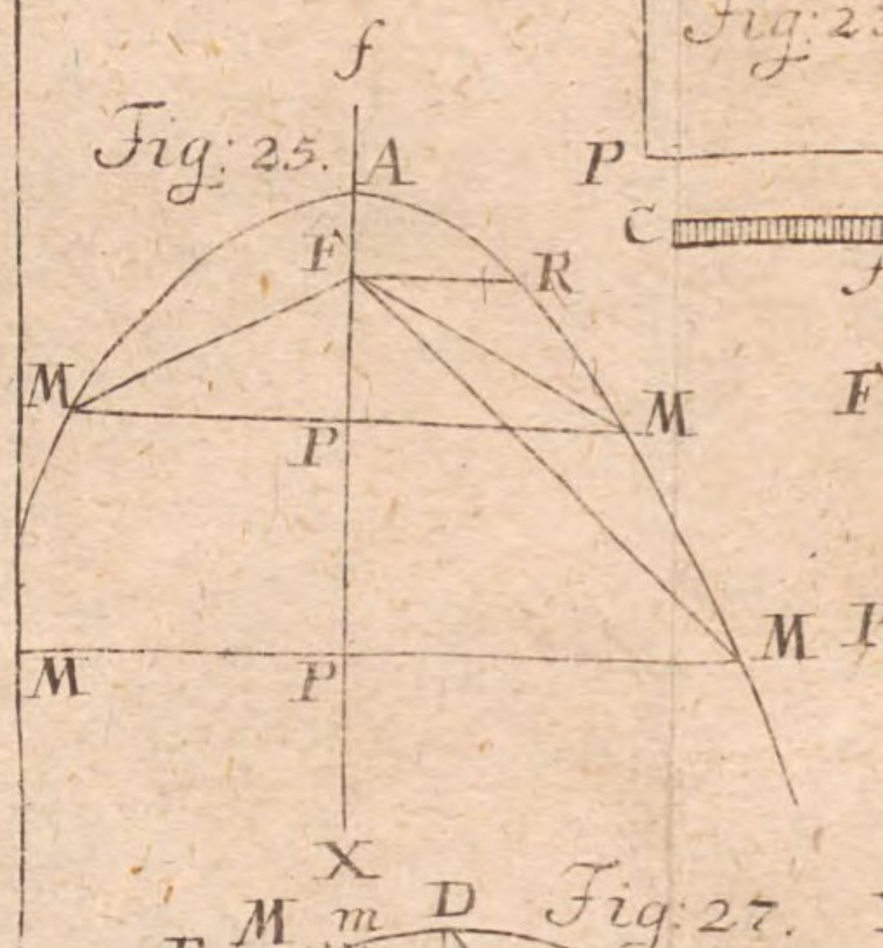


Fig: 25.

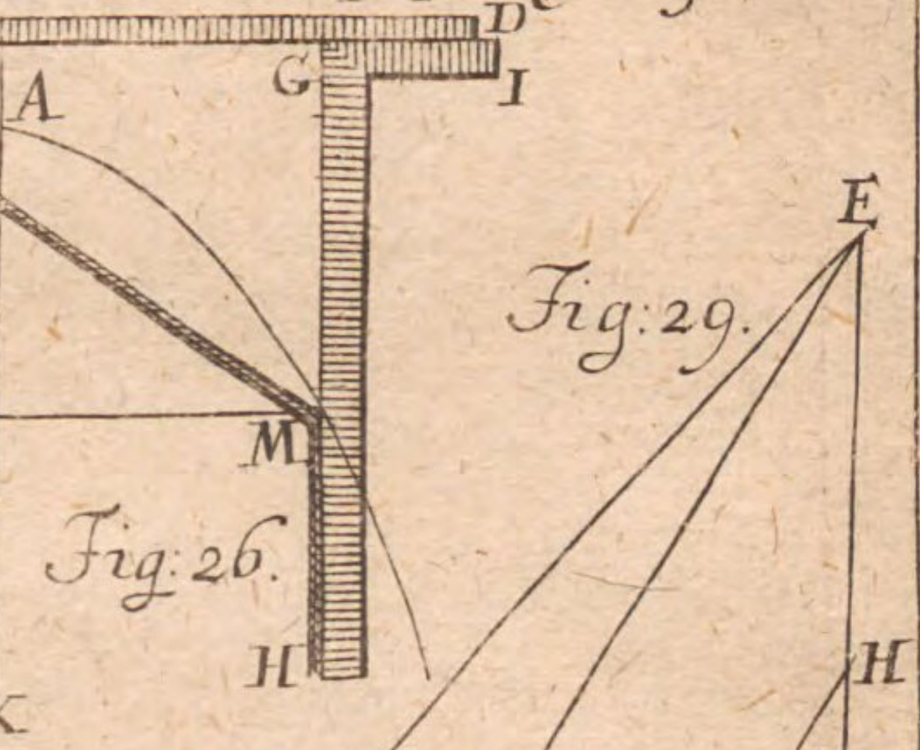


Fig: 26.

Fig: 29.

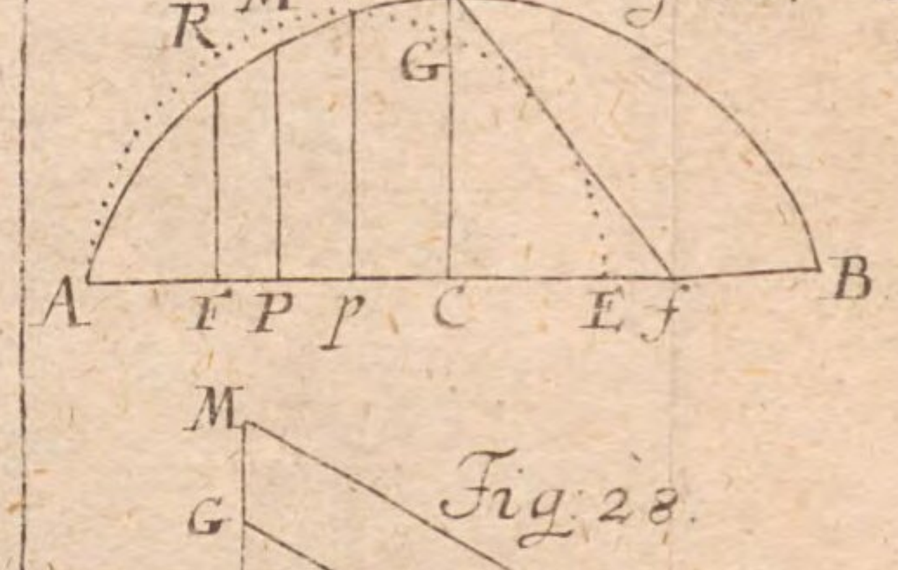


Fig: 27.

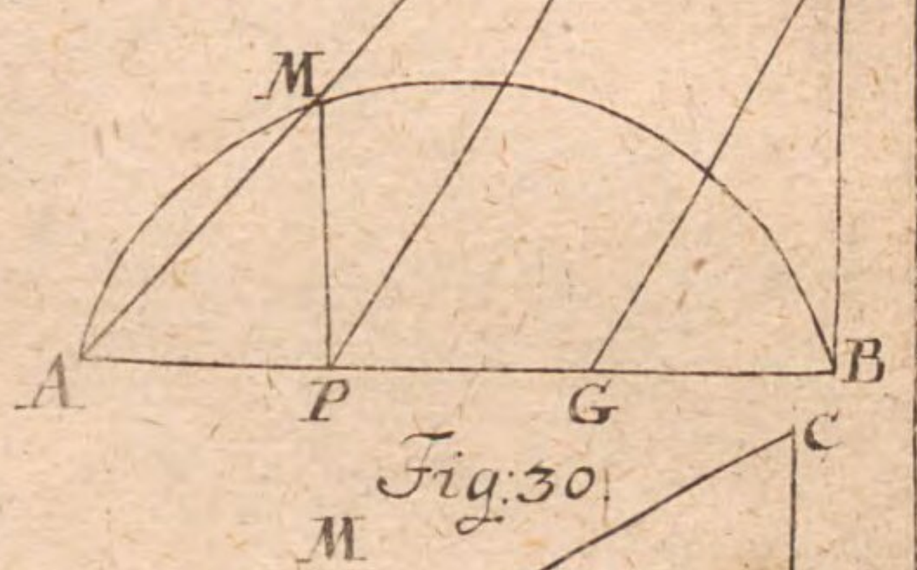


Fig: 30.

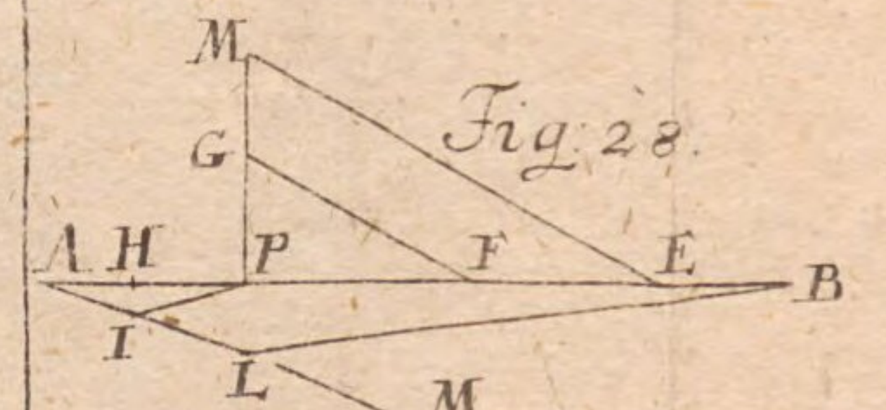
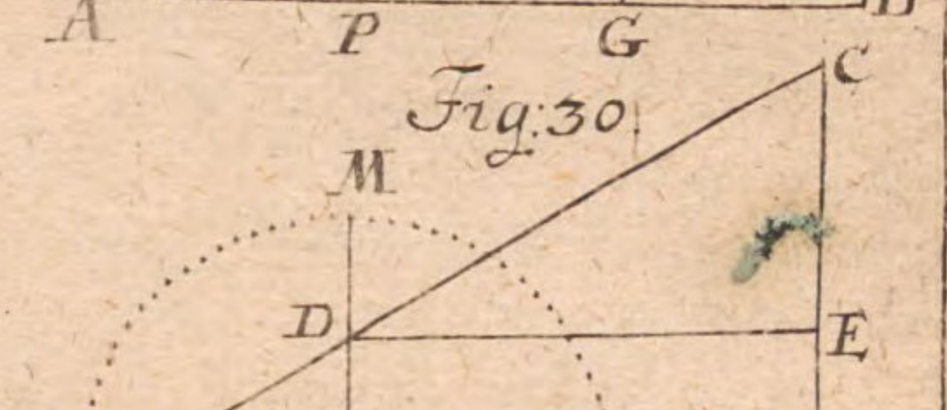


Fig: 28.



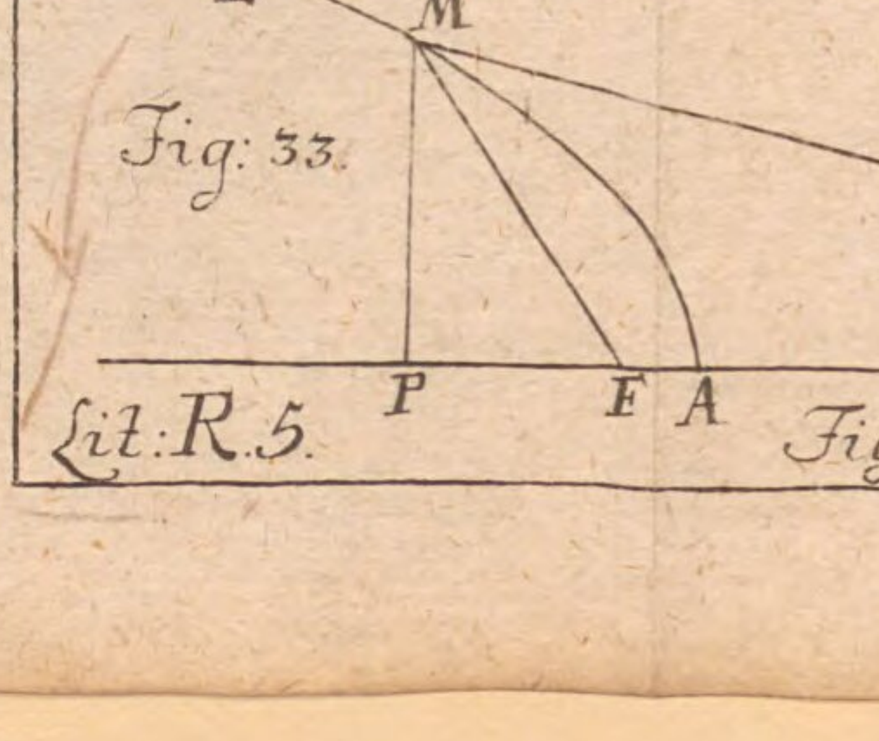
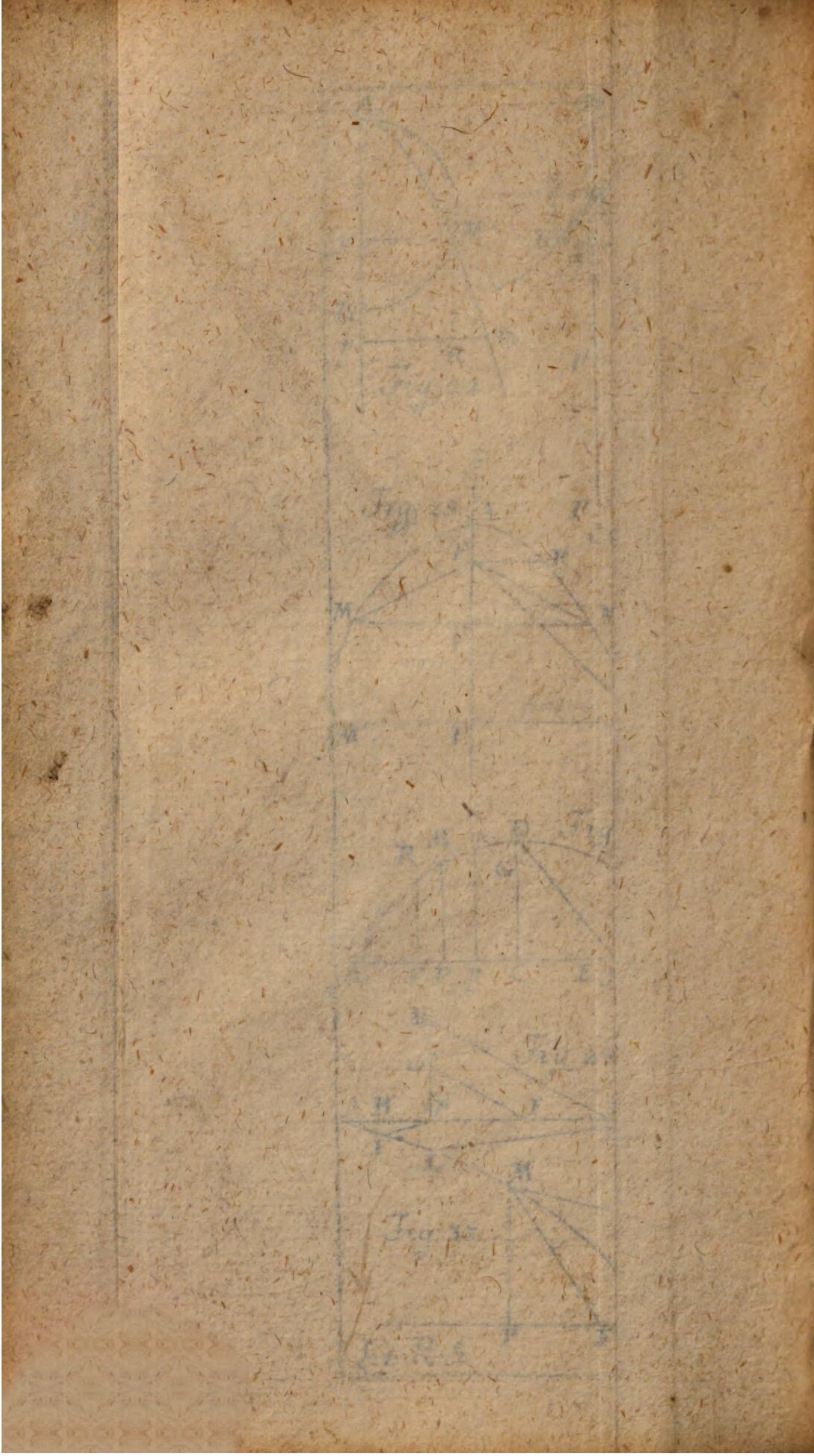


Fig: 33.

Lit: R. 5. Fig: Algebr. Tab: III.



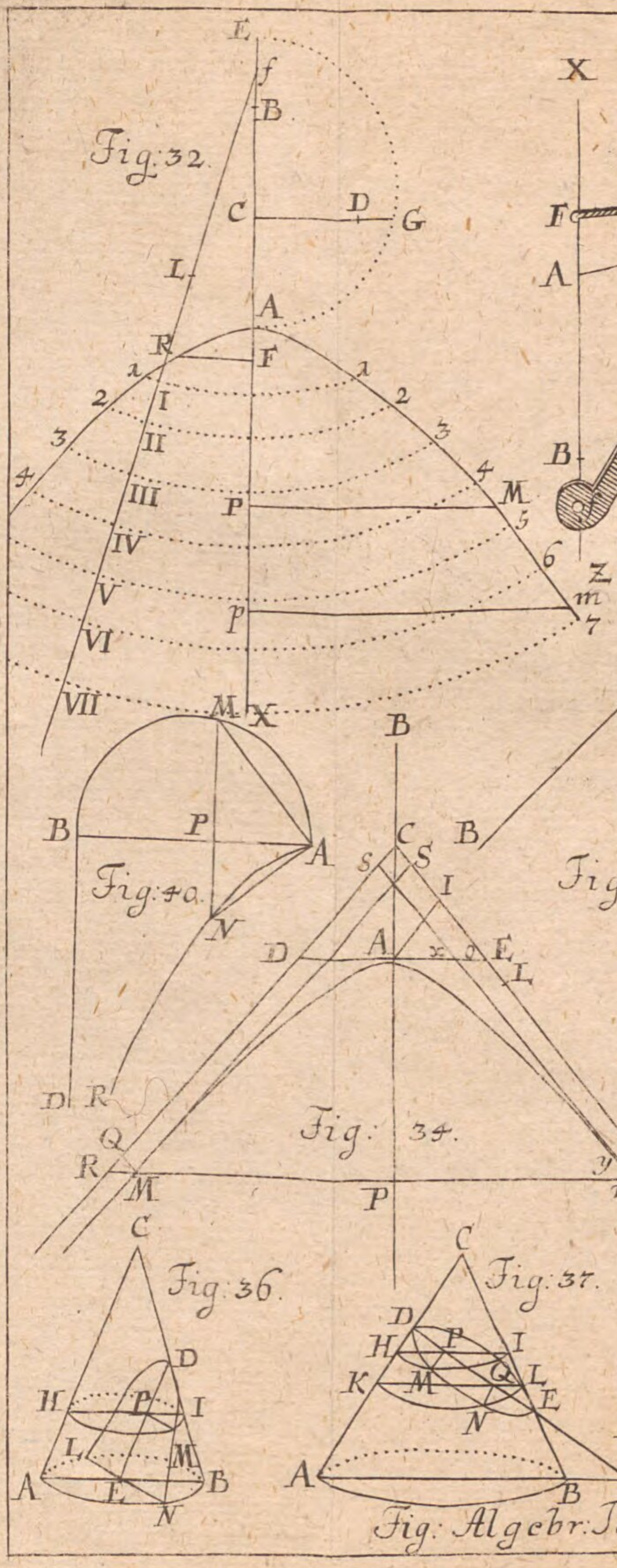


Fig: 32.

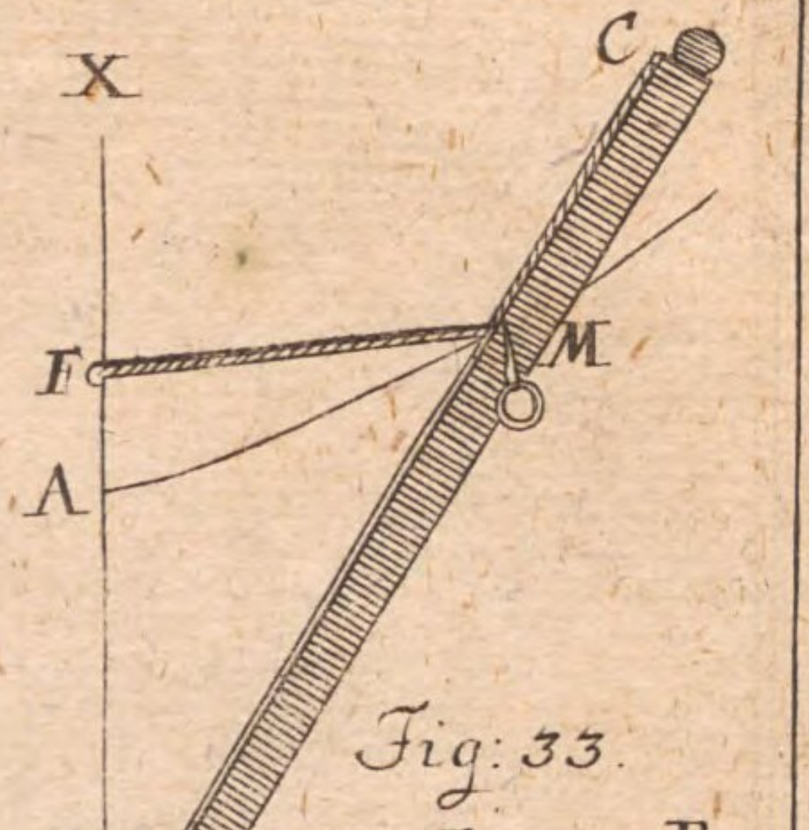


Fig: 33.

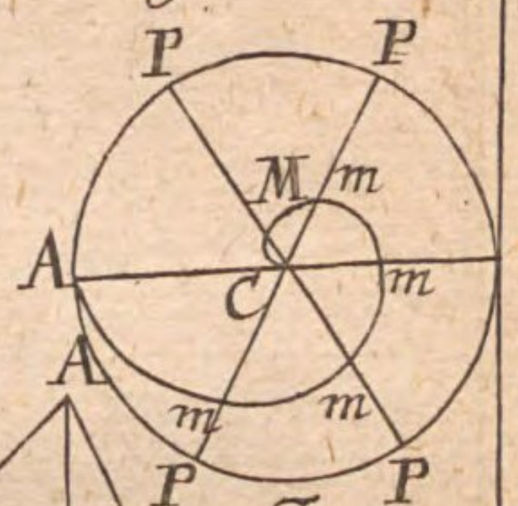


Fig: 39.

Fig: 40.

Fig: 34.

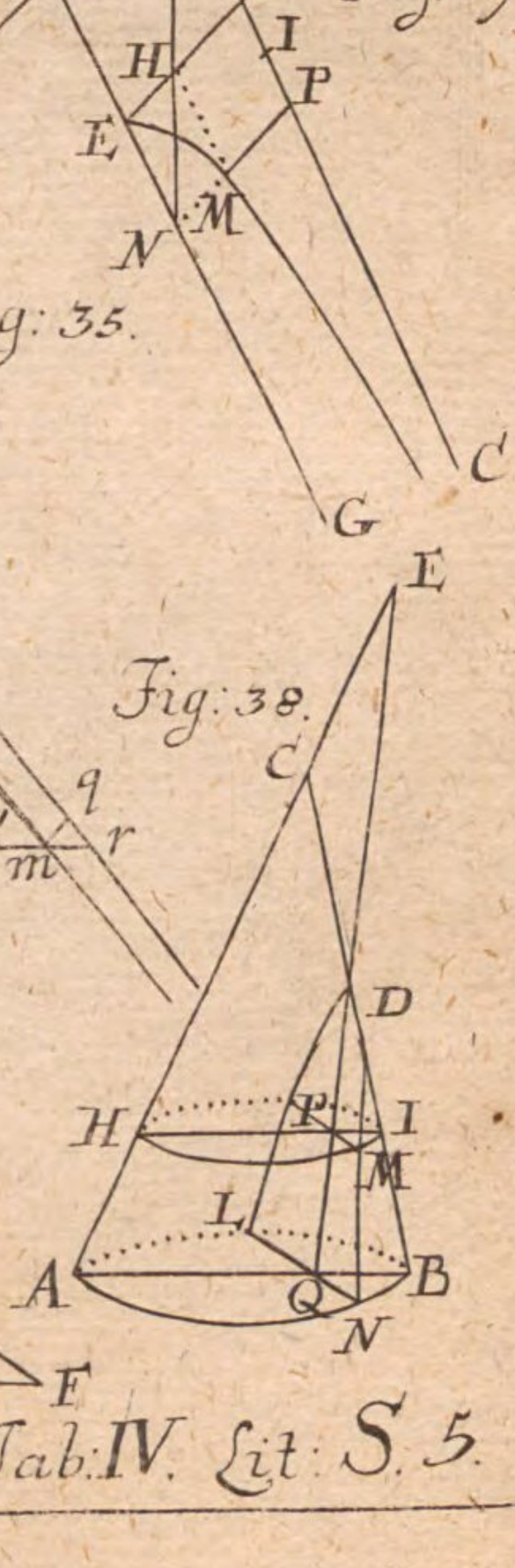


Fig: 35.

Fig: 38.

Fig: 36.

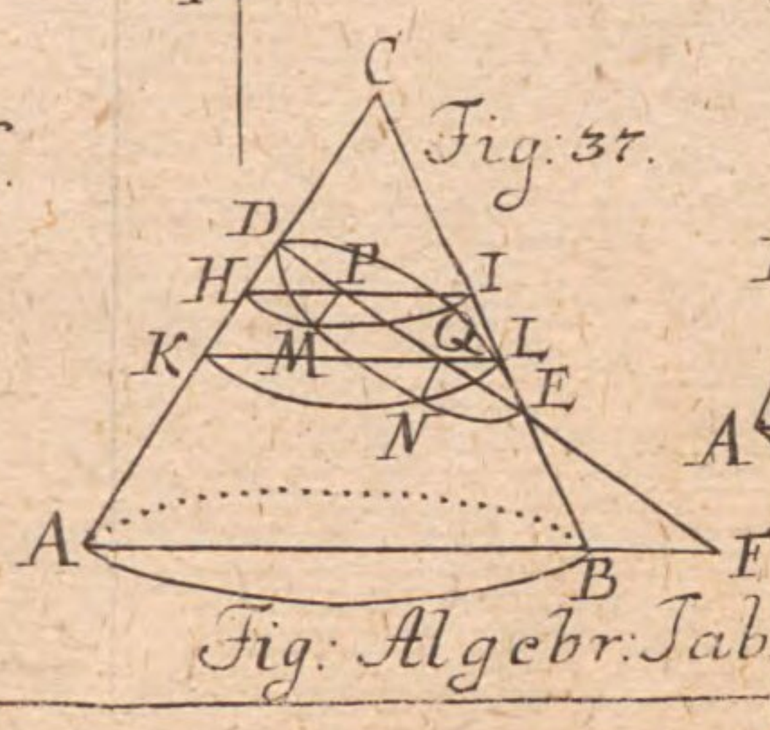


Fig: 37.

Fig: Algebr: Tab: IV. Lit: S. 5.

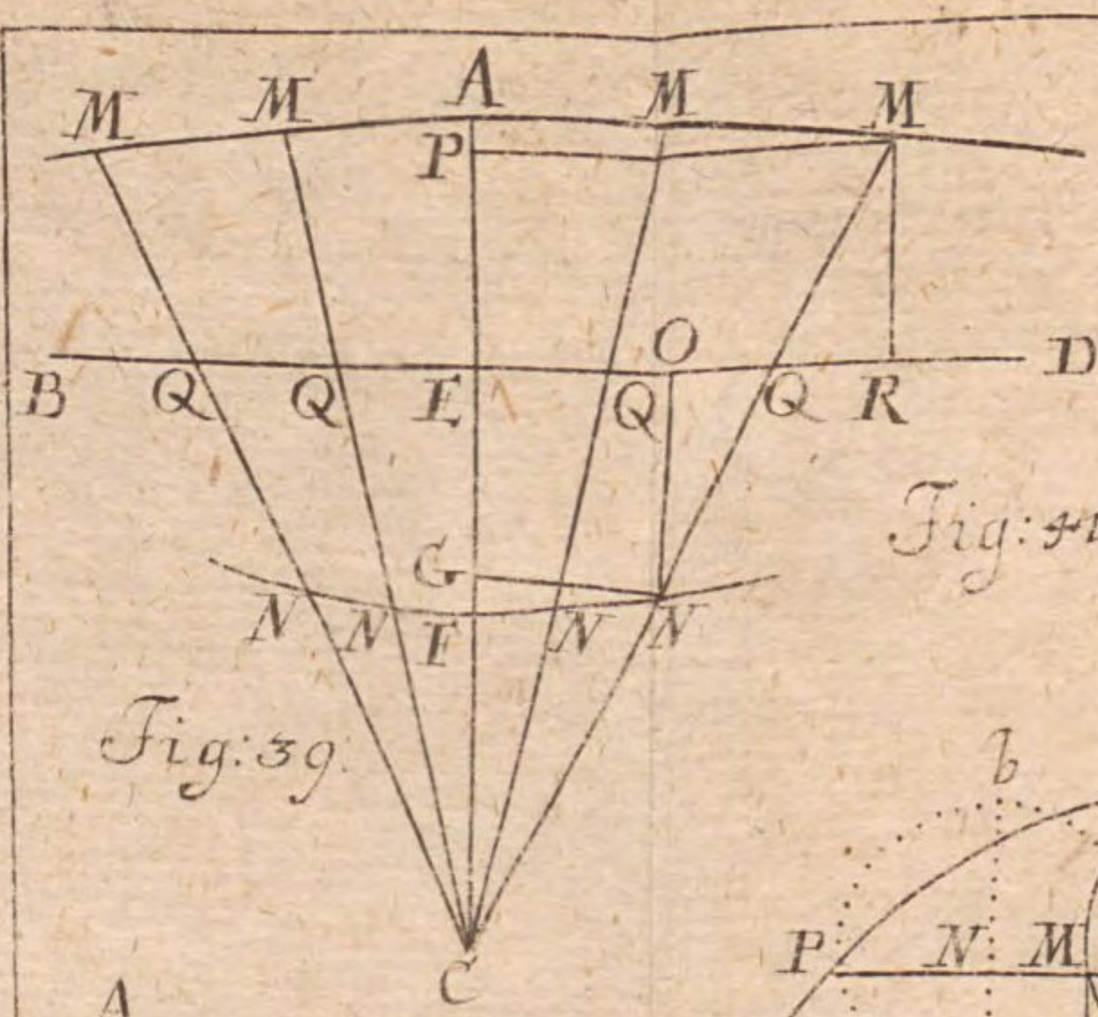


Fig: 39.

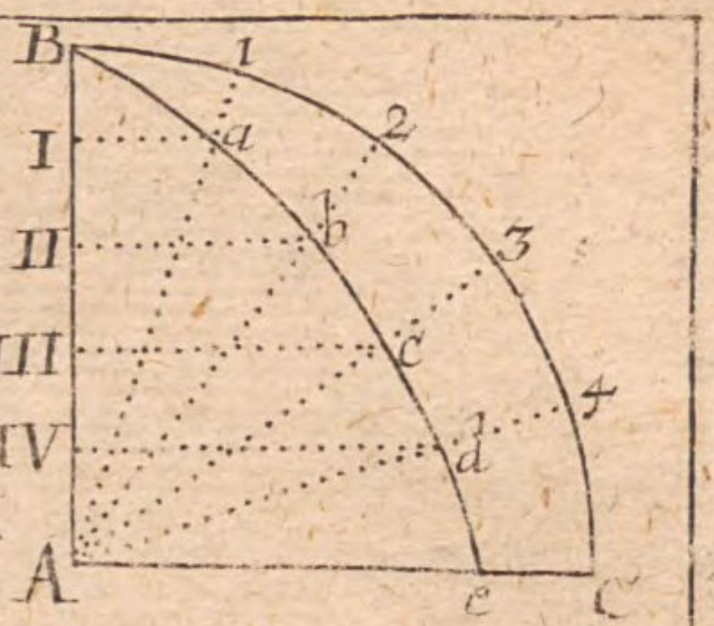


Fig: 41.

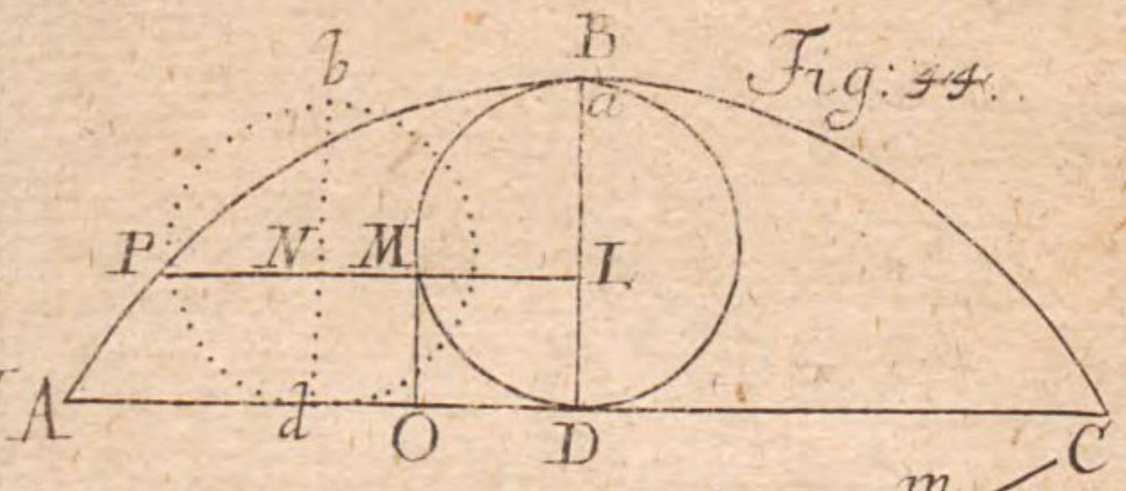


Fig: 44.

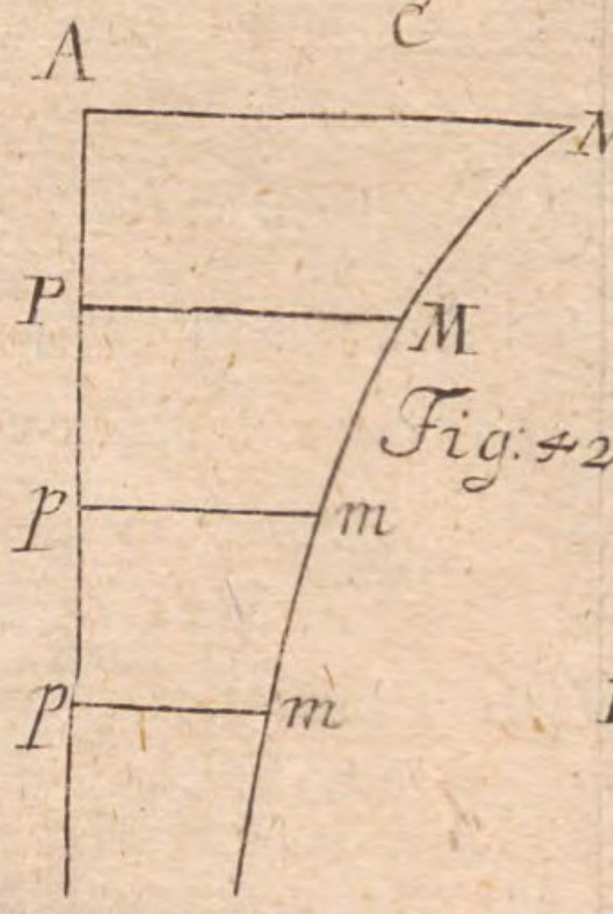


Fig: 42.

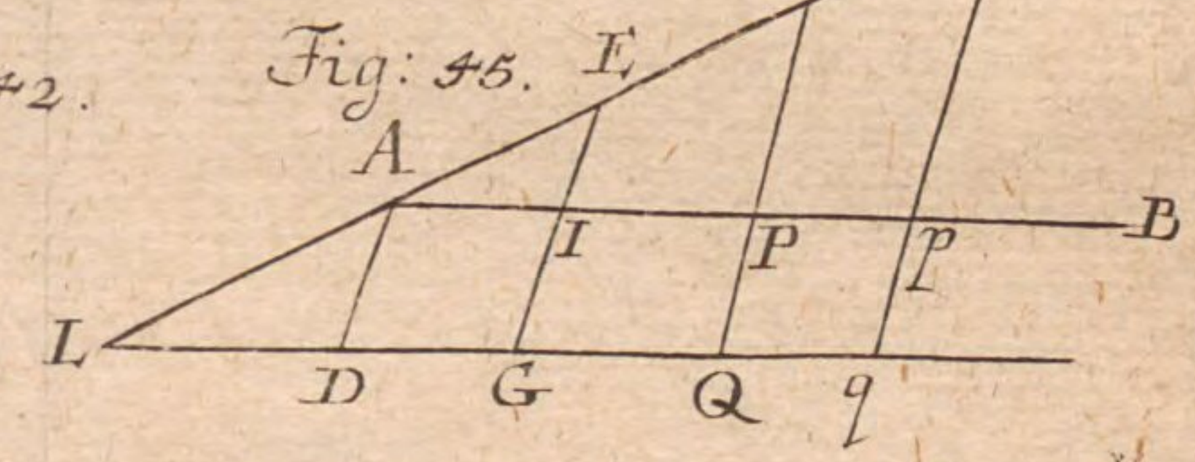


Fig: 45.

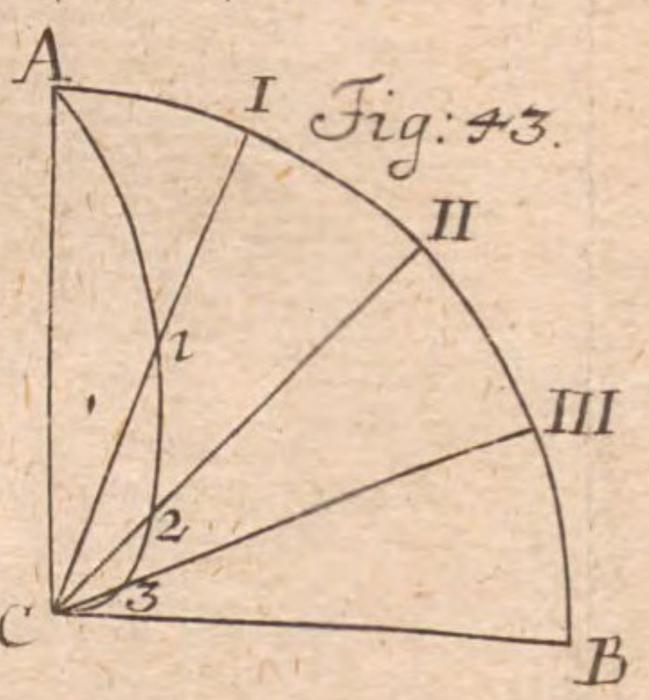


Fig: 43.

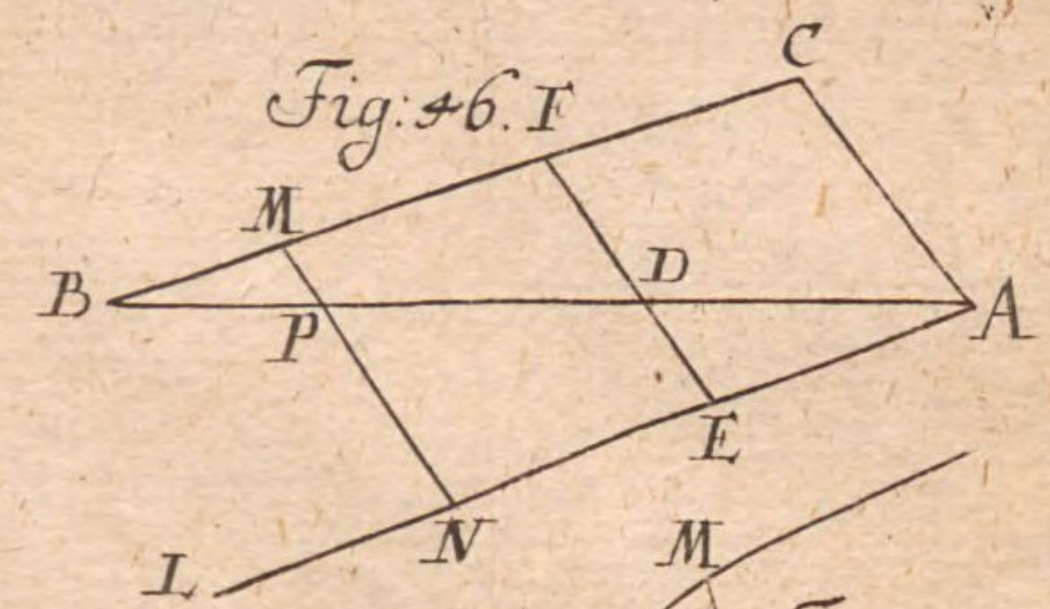


Fig: 46.

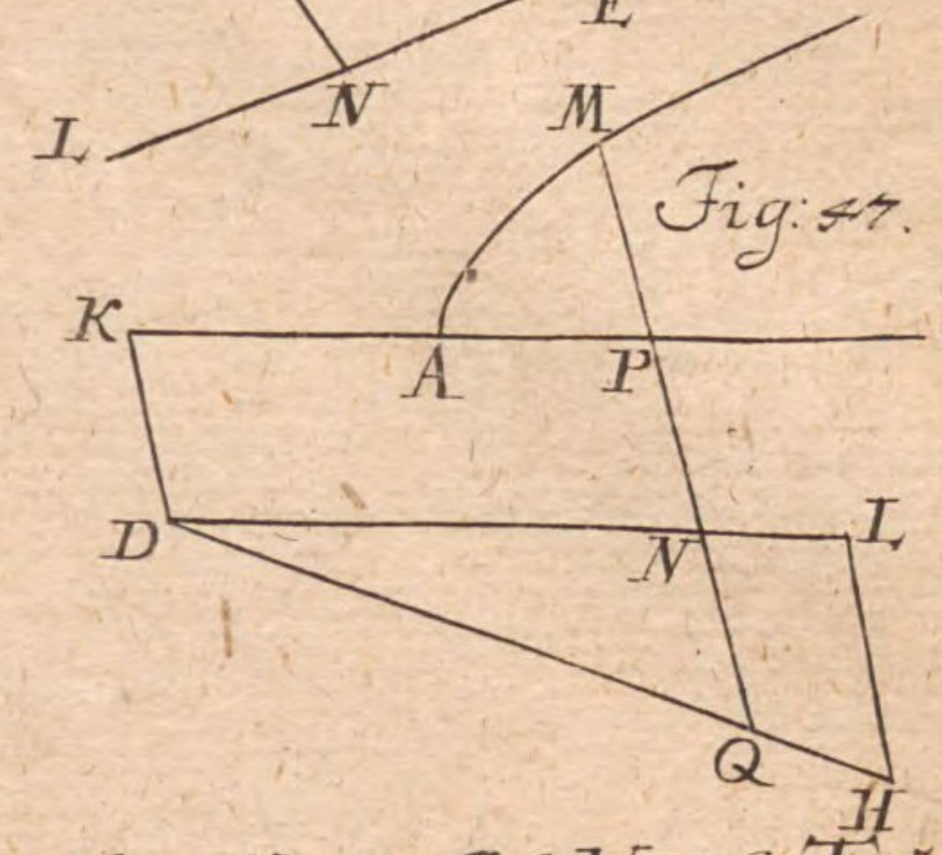


Fig: 47.

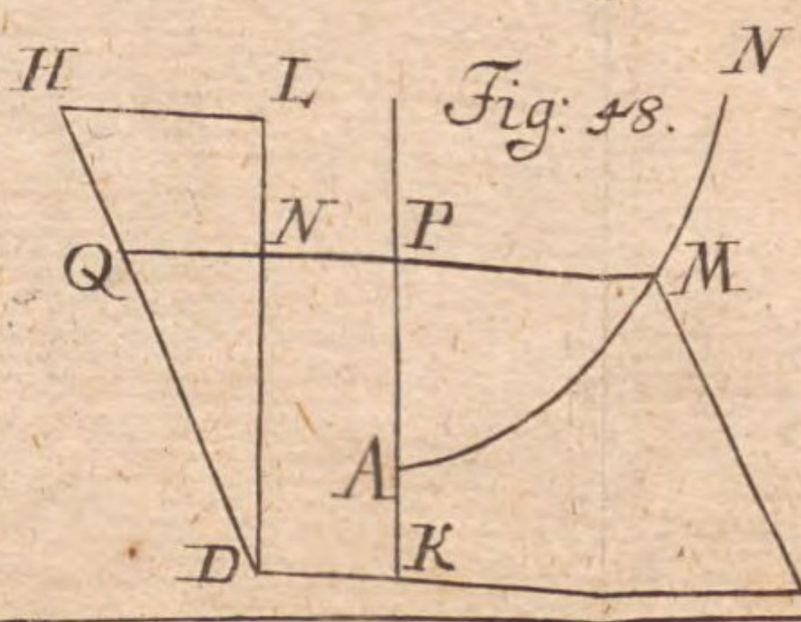


Fig: 48.

Fig: Algebr: Tab: V, Lit: T. 5.

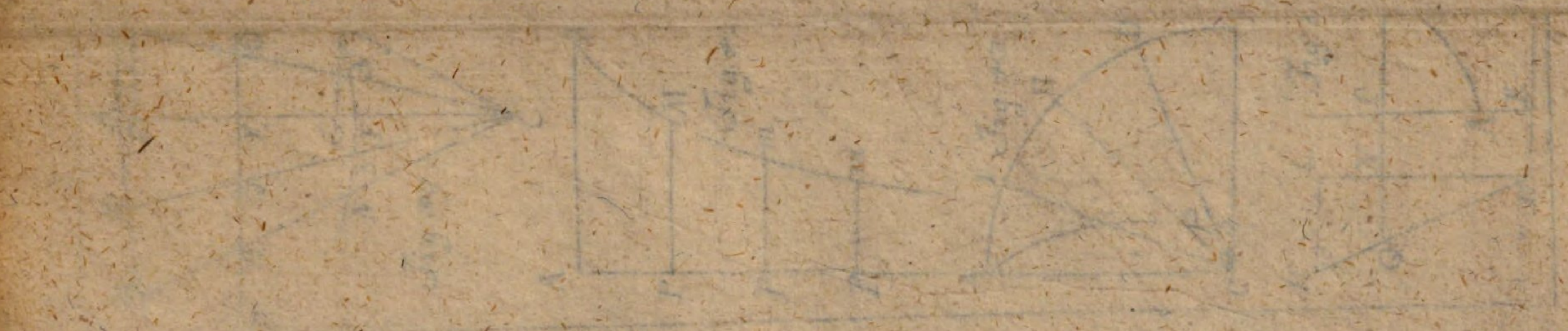


Fig: 49.

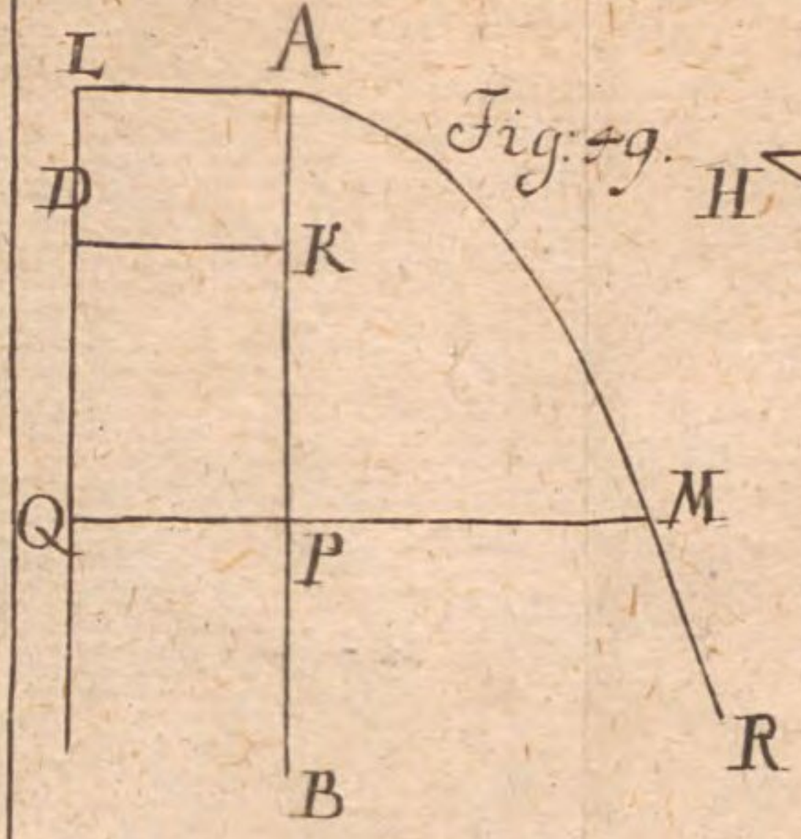


Fig: 50.

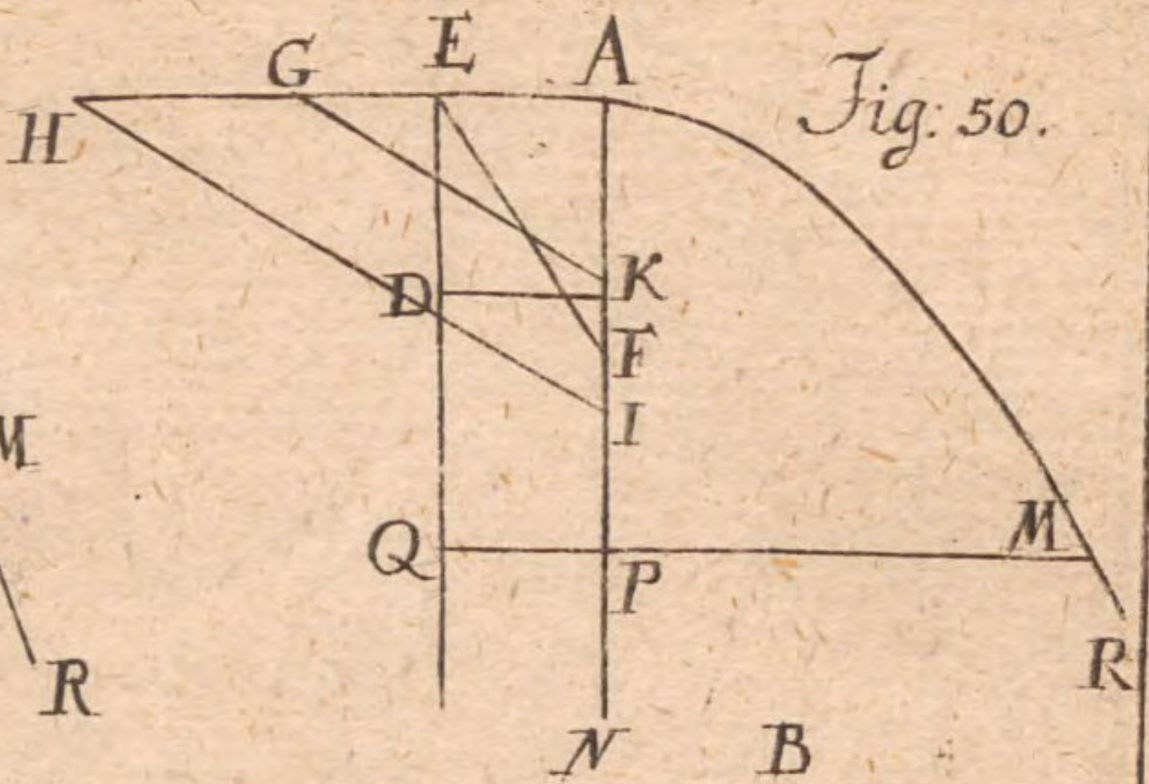
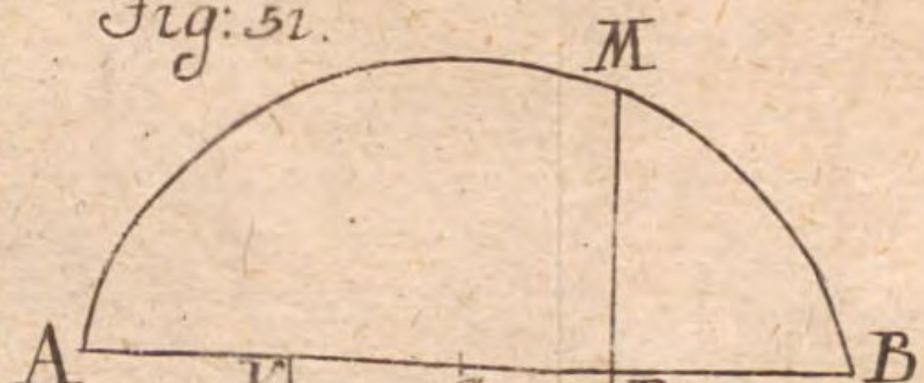


Fig: 51.



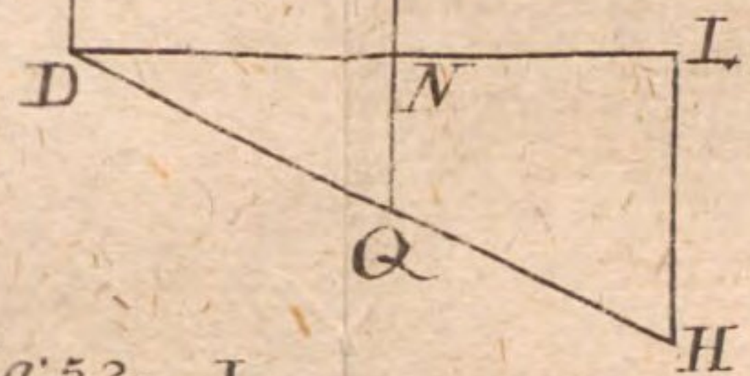


Fig: 52.

Fig: 53.

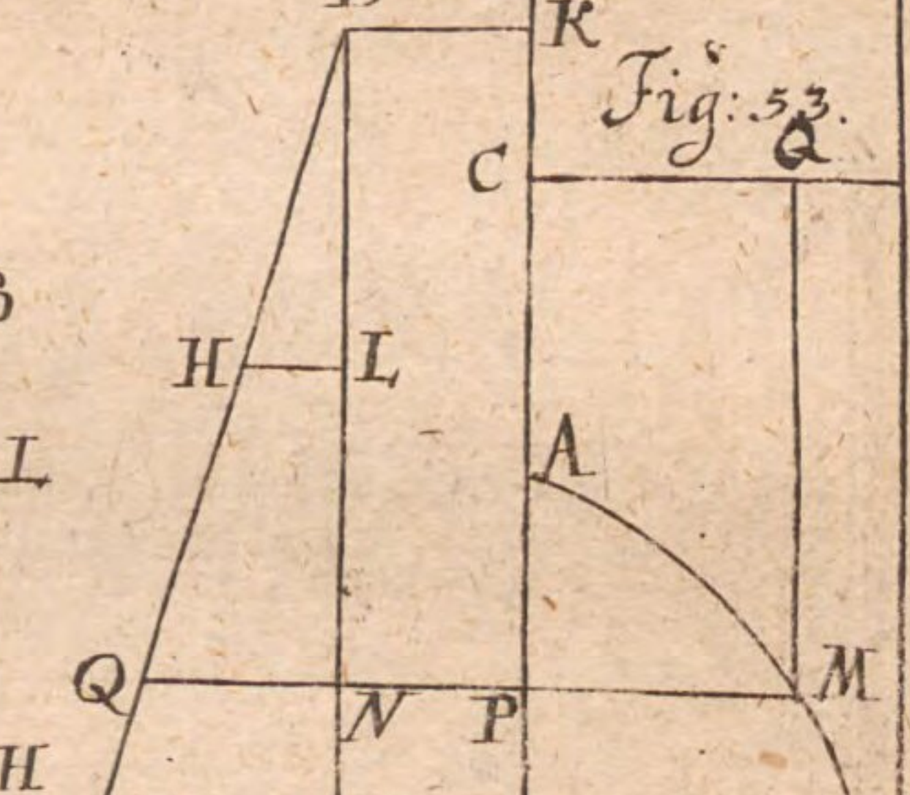


Fig: 54.

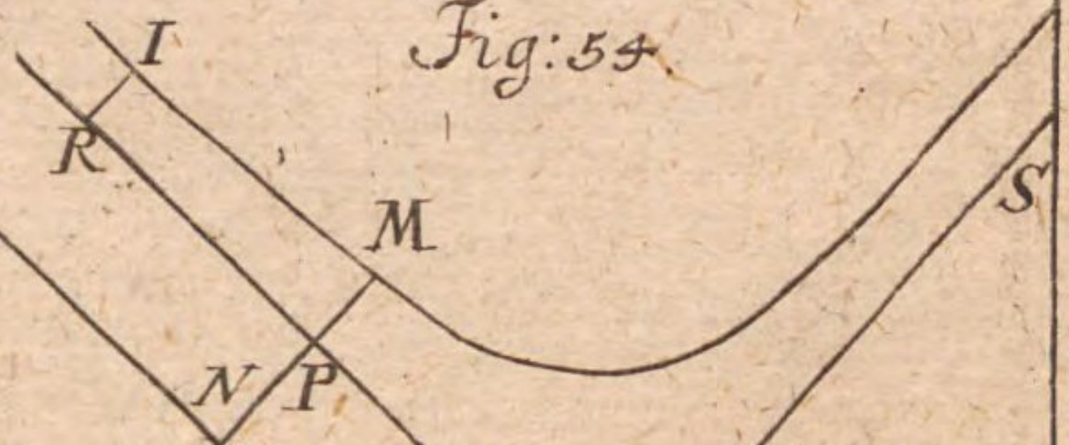


Fig: 55.

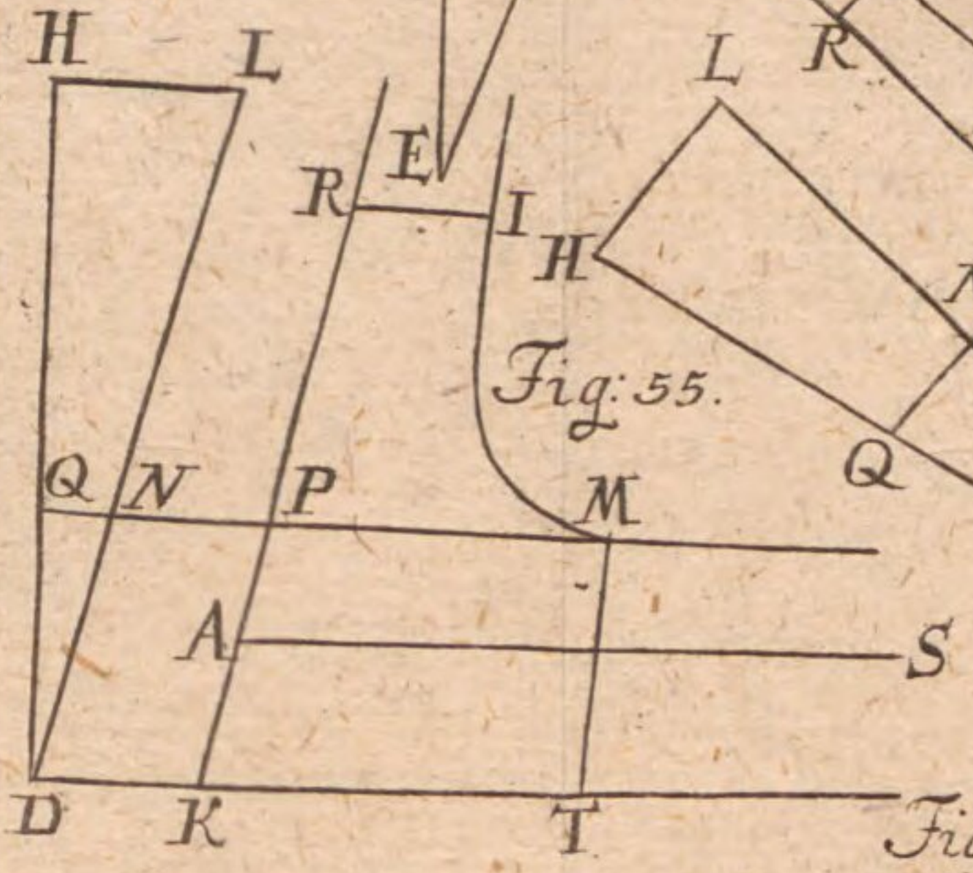


Fig: Algebr: Tab: VI. Lit: V. 5.

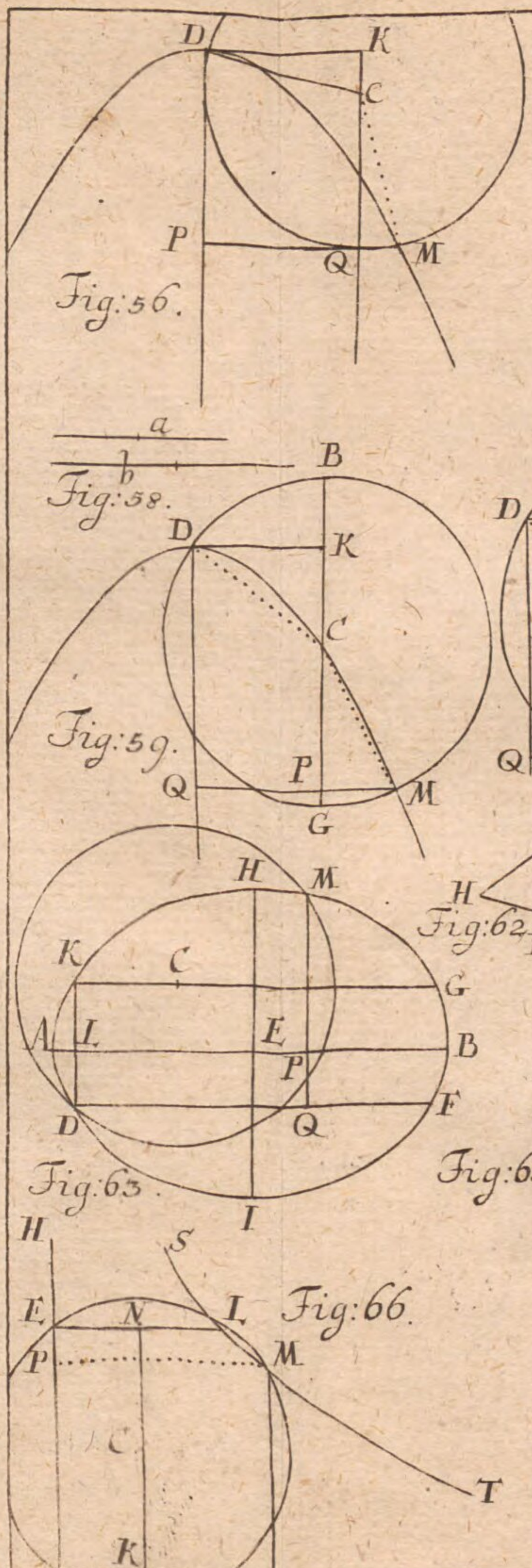


Fig:56.

Fig:57.

Fig:58.

Fig:59.

Fig:60.

Fig:61.

Fig:62.

Fig:63.

Fig:64.

Fig:65.

Fig:66.

Fig: Algebr: Tab: VII.
Lit: W. 5.

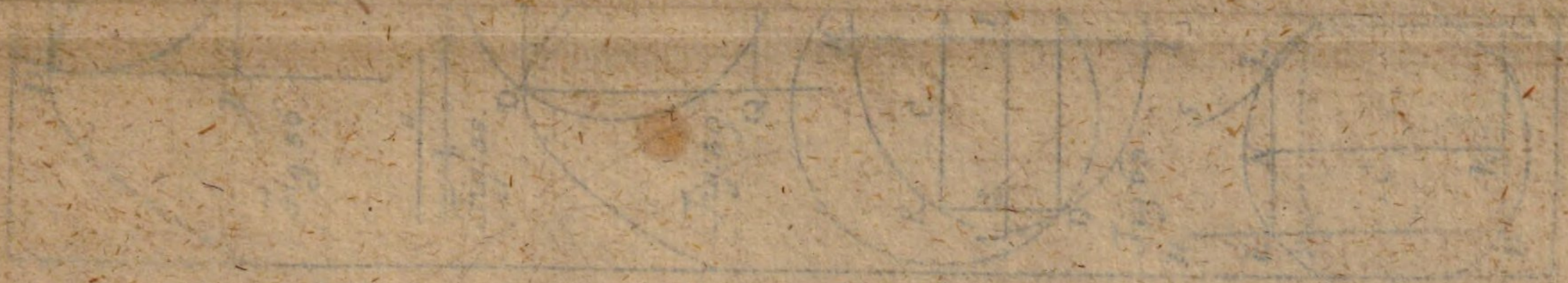


Fig: 67.

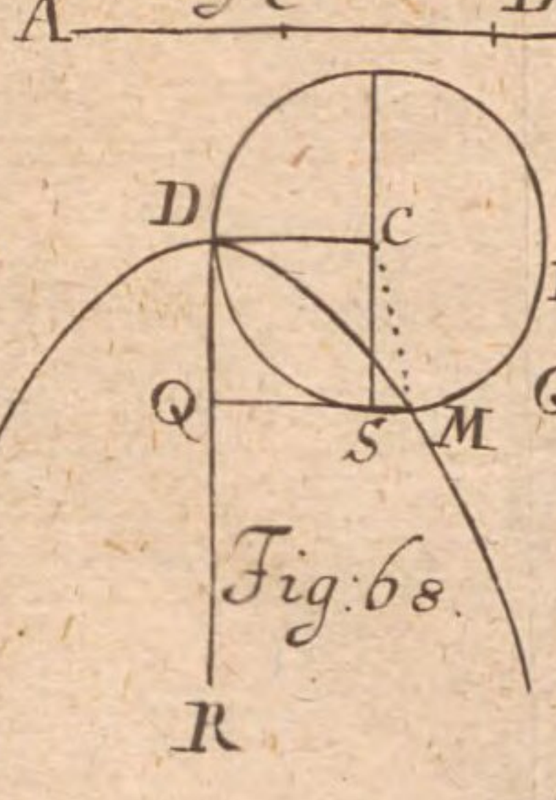


Fig: 68.

Fig: 69.

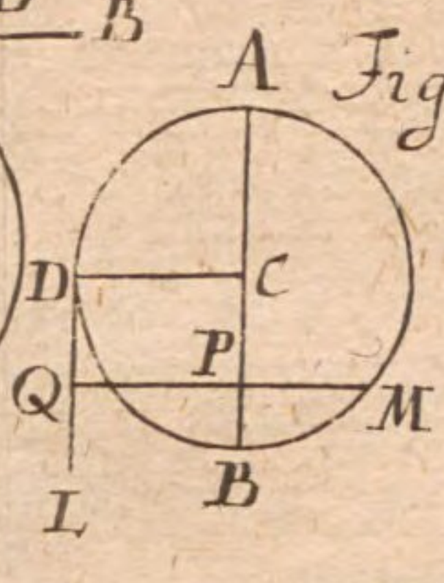


Fig: 70.

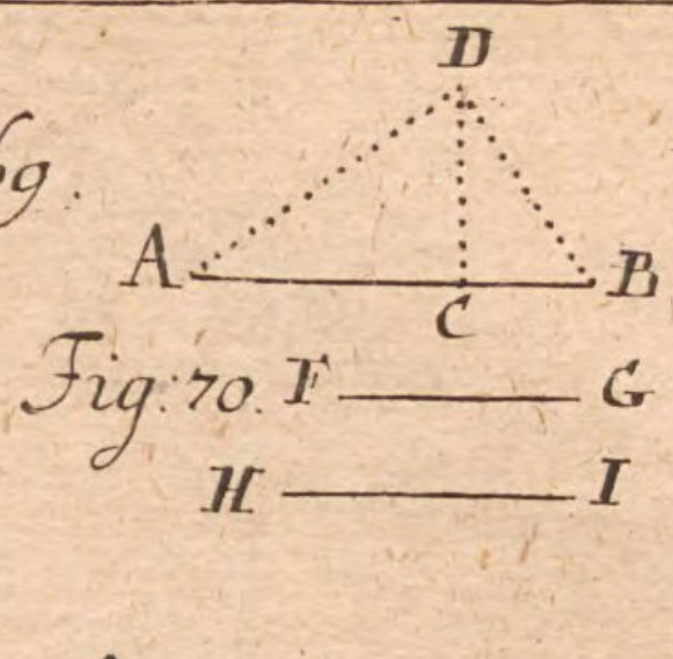


Fig: 71.

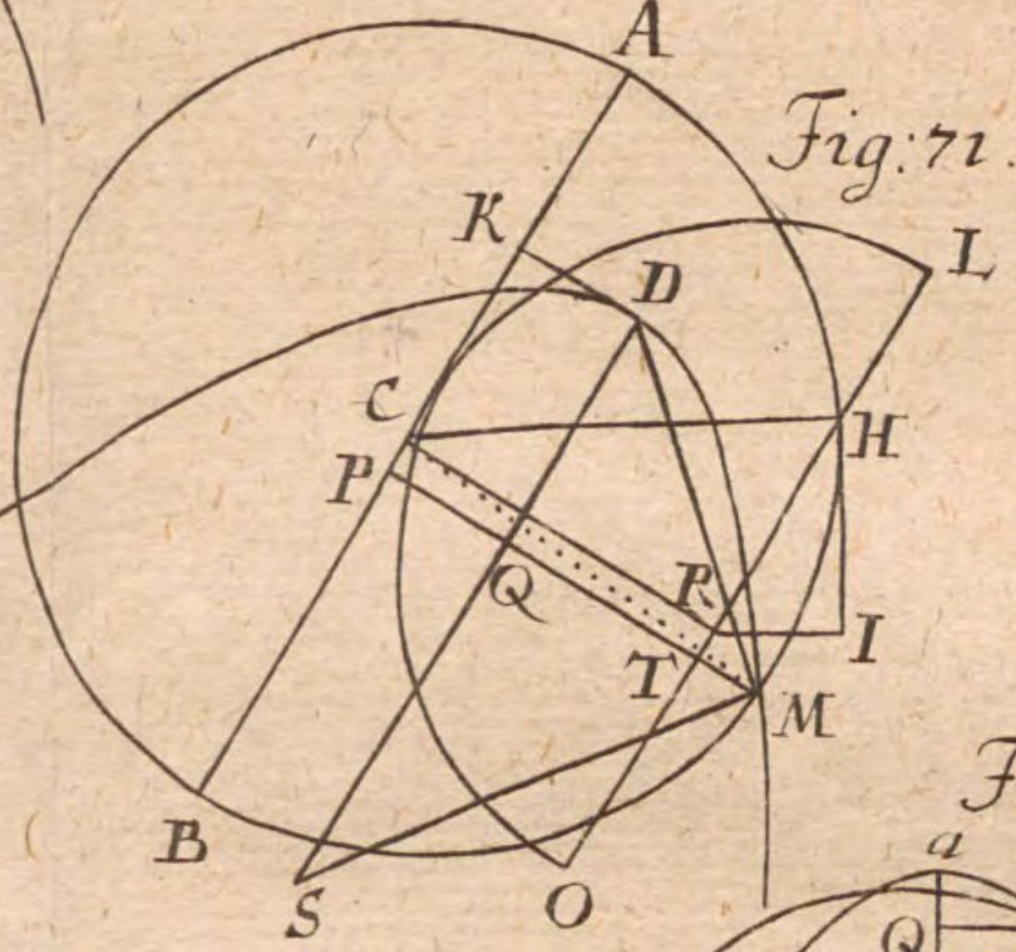


Fig: 72.

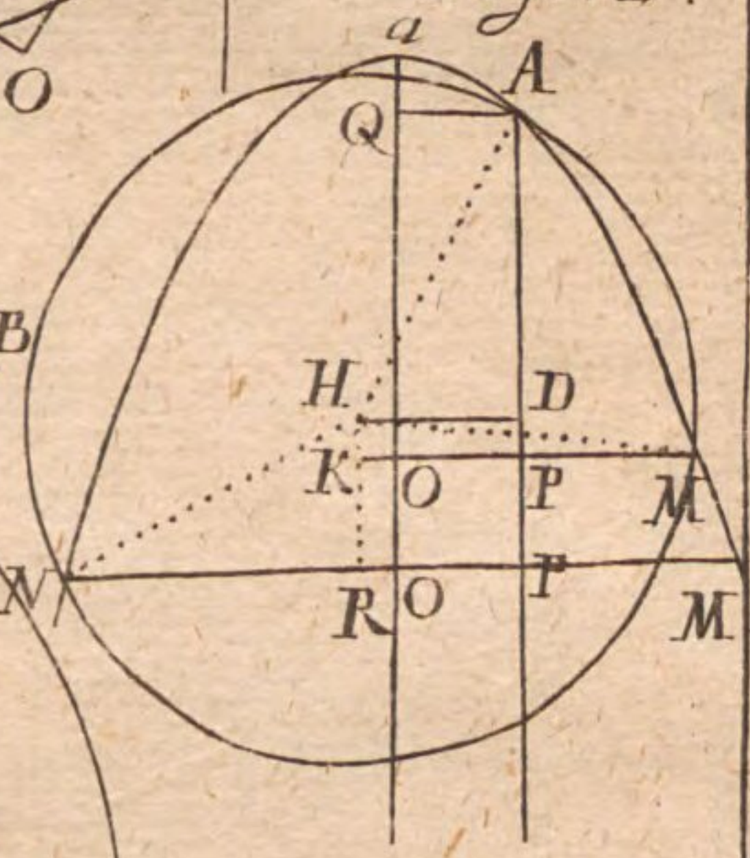


Fig: 73.

Fig: 74.

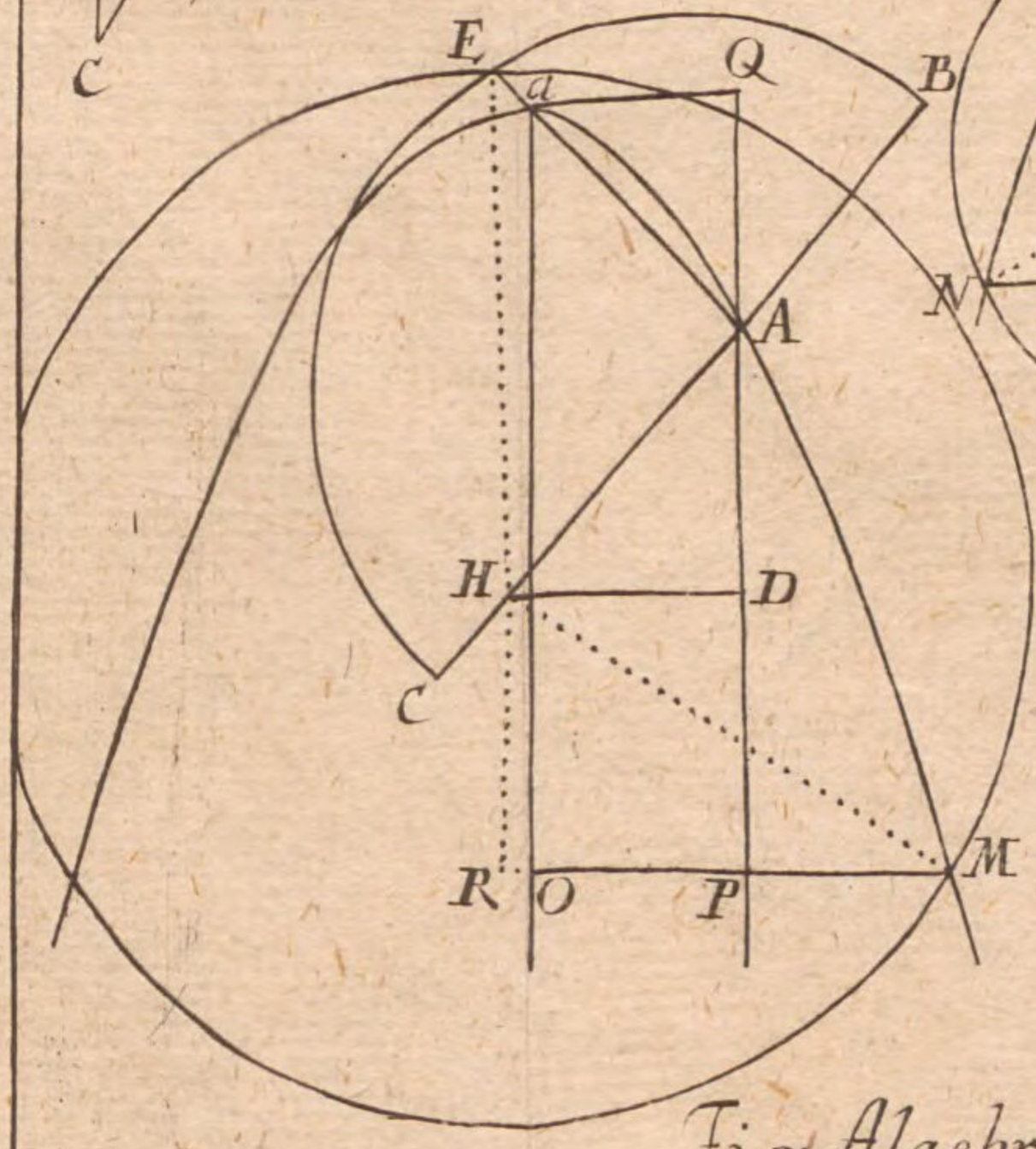


Fig: Algebr: Tab: VIII. Lit: X. 5.

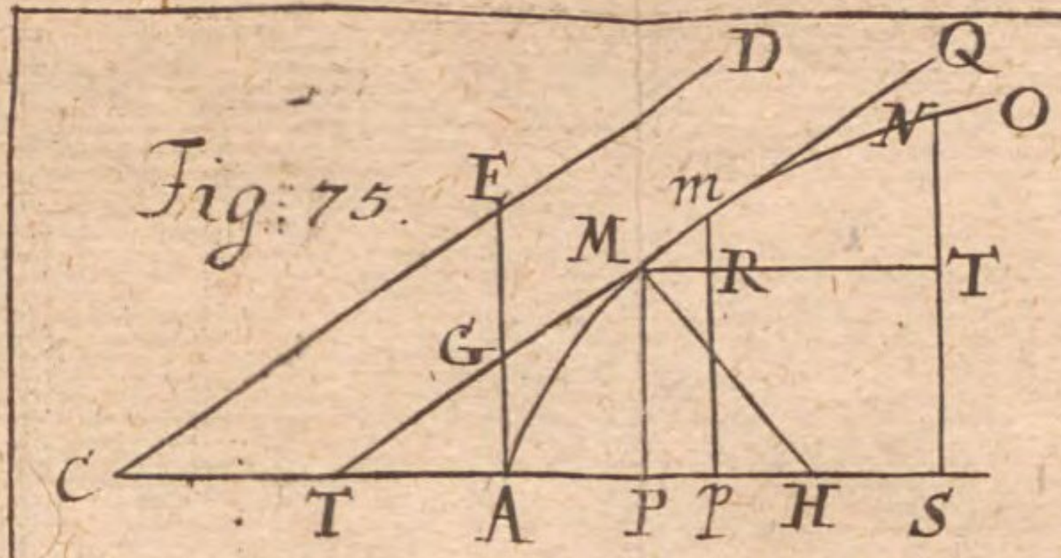


Fig: 75.

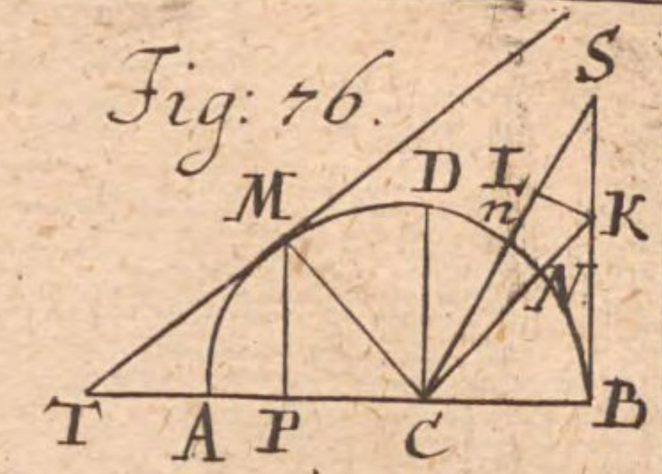


Fig: 76.

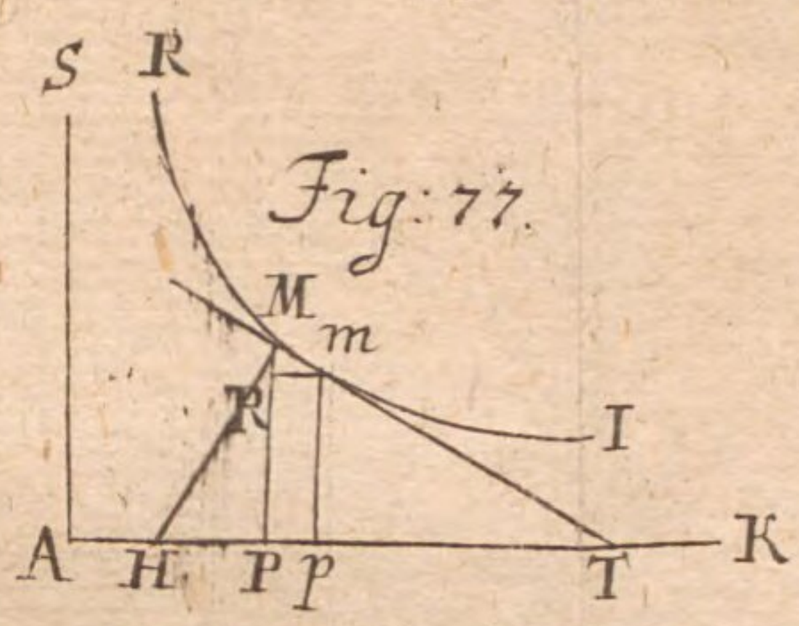


Fig: 77.

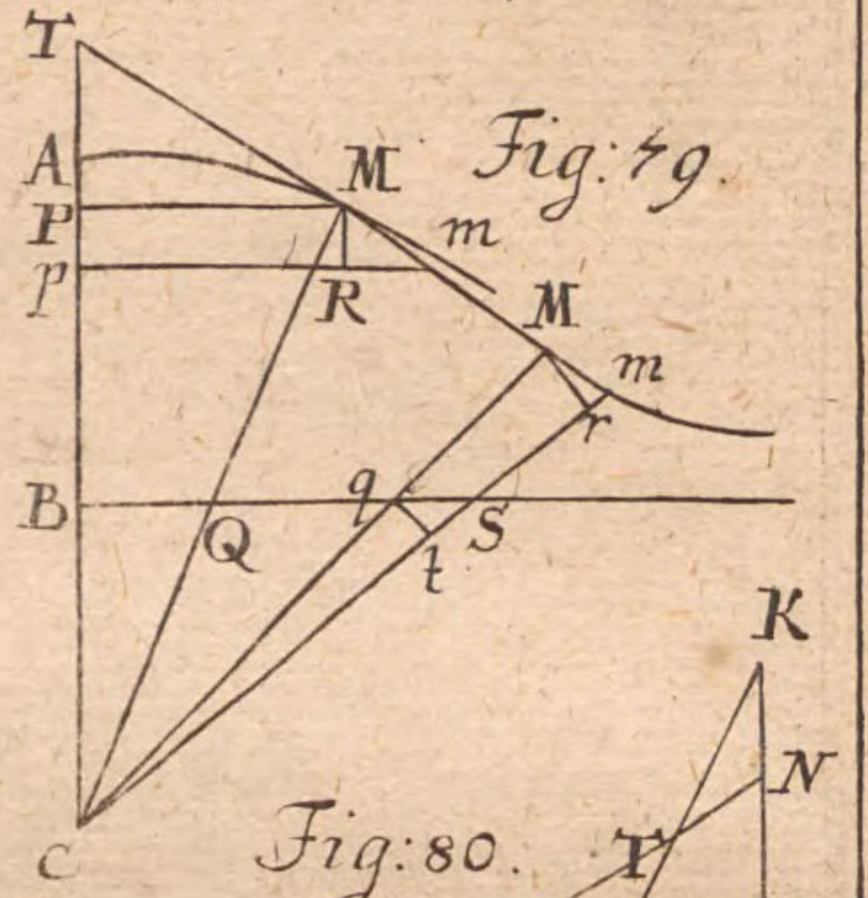


Fig: 79.

Fig: 80.

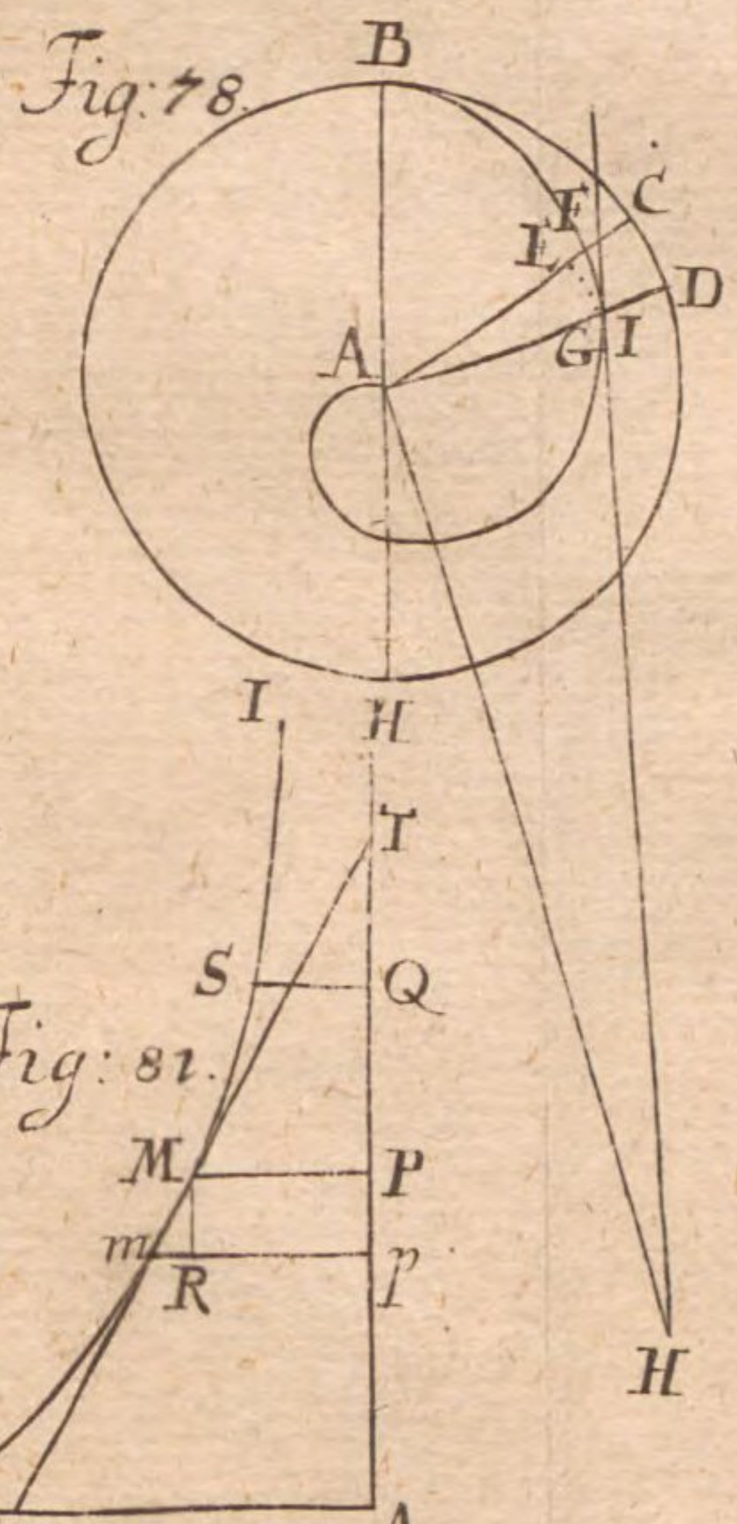


Fig: 78.

Fig: 81.

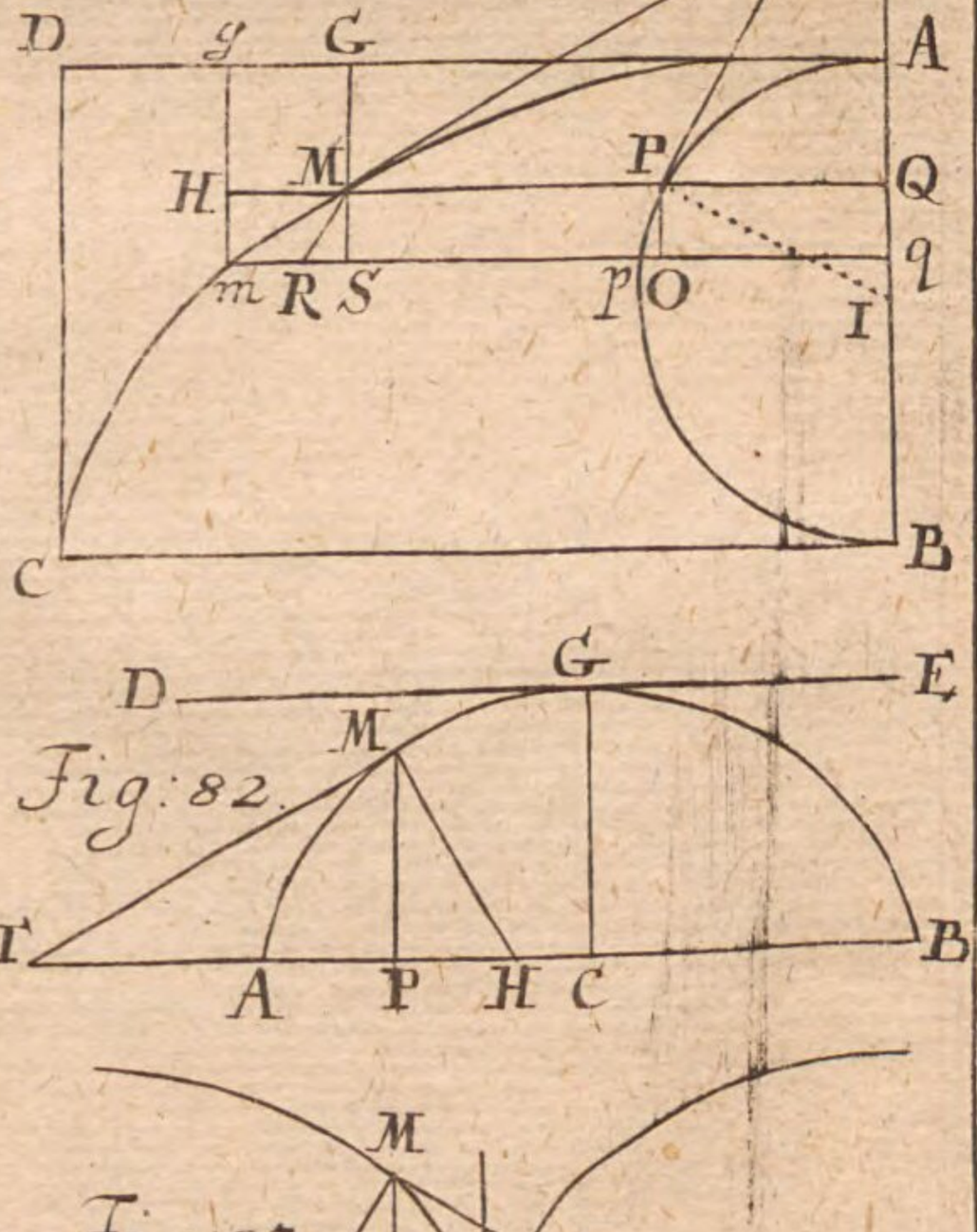


Fig: 82.

Fig: 83.

Lit: Y. 5

Fig: Algebr: Tab: IX.

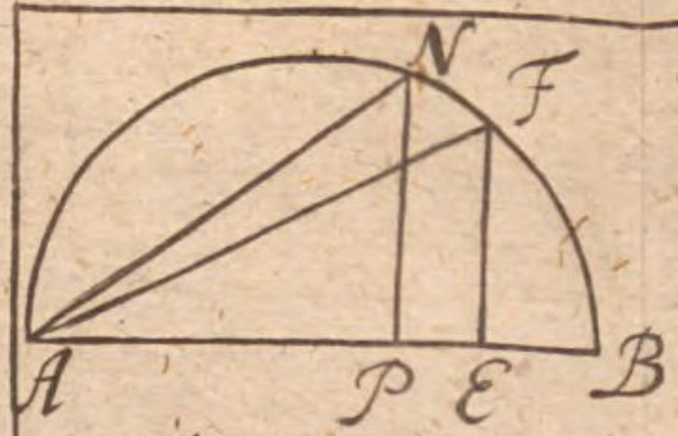


Fig: 84.

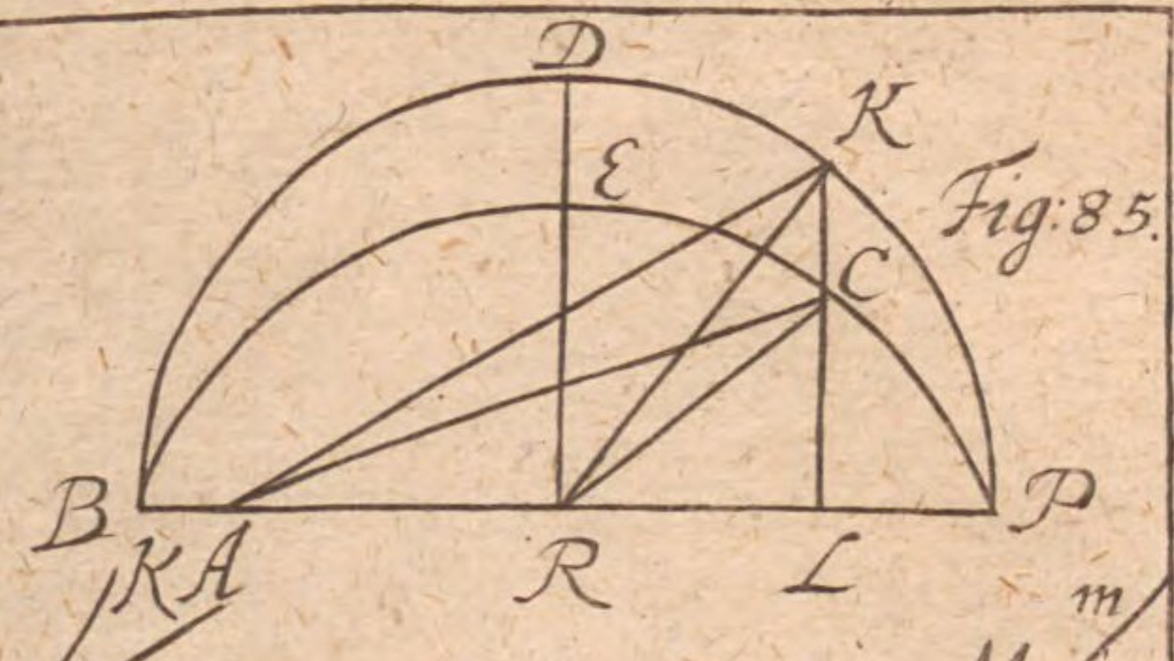


Fig: 85.

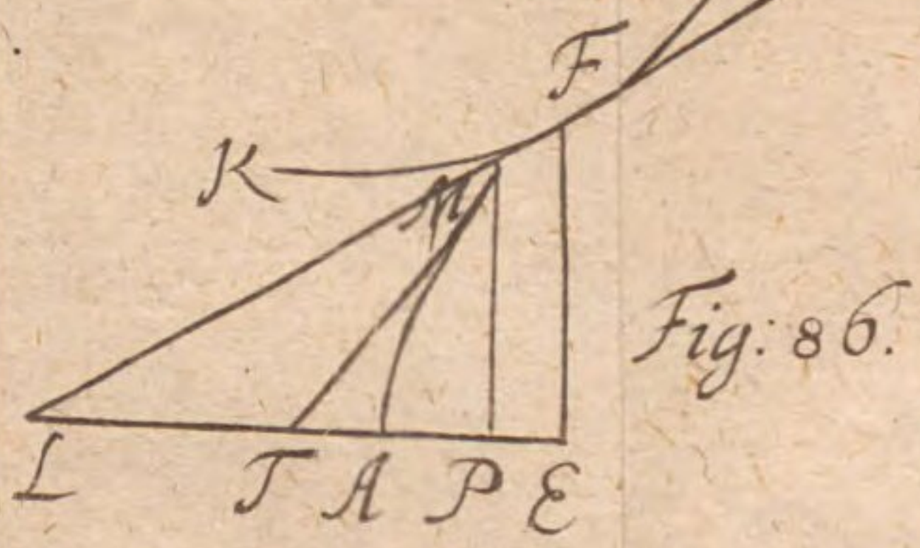


Fig: 86.

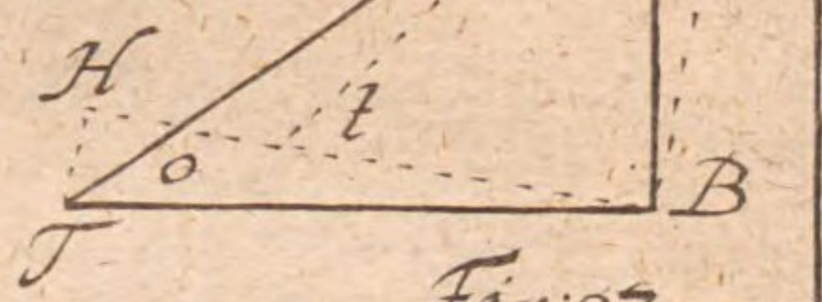


Fig: 87.

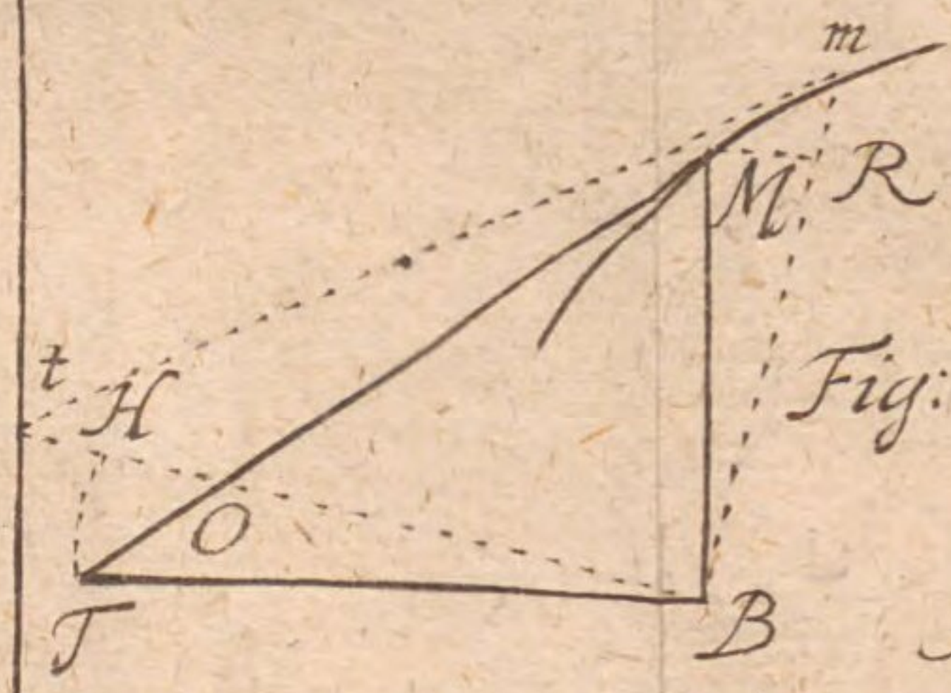


Fig: 88.

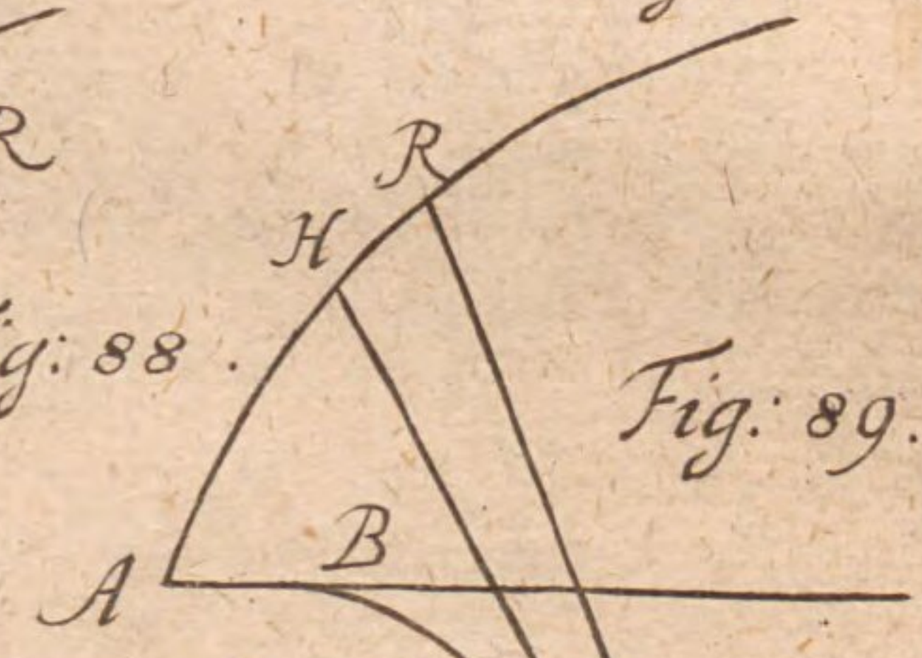


Fig: 89.

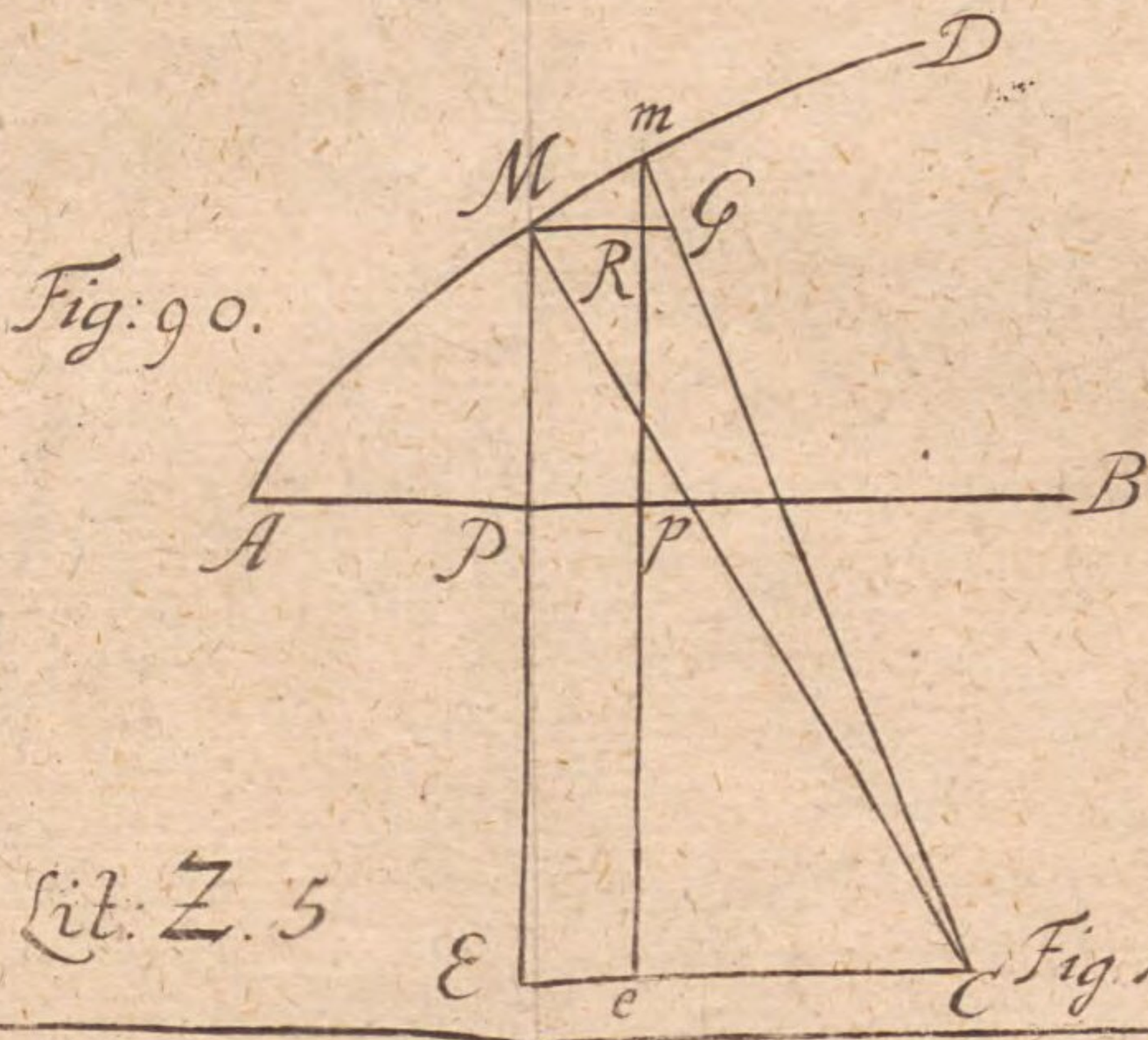
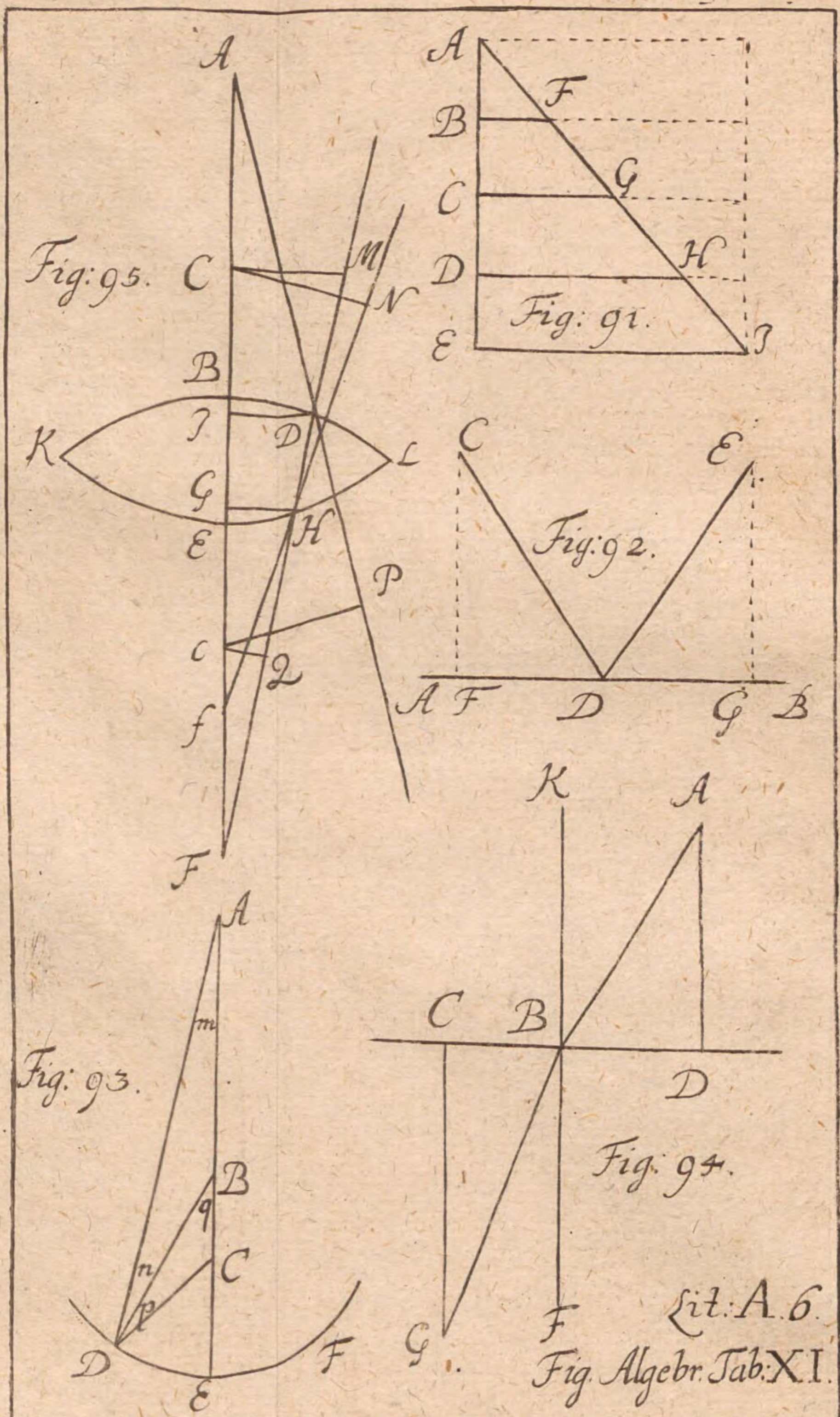


Fig: 90.



Lit: A. 6.

Fig. Algebr. Tab: XI.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Wolff, Christian von, 1679-1754

Der Anfangs-Gründe Aller Mathematischen Wiessenschaften ... Theil

Bd.: [4]

Halle im Magdeburgischen 1725

Math.u. 213 d-4
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11191115-3
VD18 12562017-001